

Математика – проблемы, парадоксы, задачи и решения

Вопросы для обсуждения:

1. Математика как технология мышления.
2. Математика как инструмент постановки и решения задач.
3. Математические парадоксы и их преодоление.

Сведения о докладчике:

доктор физико-математических наук, доцент

Области научных интересов:

нелинейная условная оптимизация, двухуровневая оптимизация,
равновесное распределение ресурсов, оптимизация топологии сетей

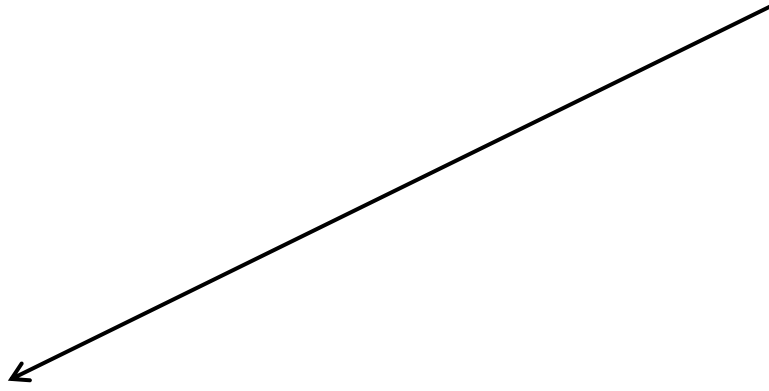
A collage of mathematical symbols and formulas. At the top center is a large infinity symbol ∞ . To its left is the expression $2 > -3$. Below that is $0.999... = 1$. To the right of the infinity symbol are the symbols $+$, $-$, $\times$, and $\div$. Below the infinity symbol is the approximation $\pi \approx 3.14$. To the left of this is $\sqrt{2}$. Below $\pi \approx 3.14$ is the expression $1 + 2 \cdot 3$. To the right of this is 5^2 . Below $1 + 2 \cdot 3$ is $(1 - 2) + 3$. At the bottom left is $5(2 + 2)$. At the bottom center is the equation $101_2 = 5_{10}$.

- ✗ специалист в области логики
- ✗ специалист в области истории науки
- ✗ специалист в области эпистемологии
- ✓ практик, владеющий математикой
- ✓ прикладной математик
- ✓ разработчик новых методов и моделей

Математика

Математика

Наука



Математика

Наука

?

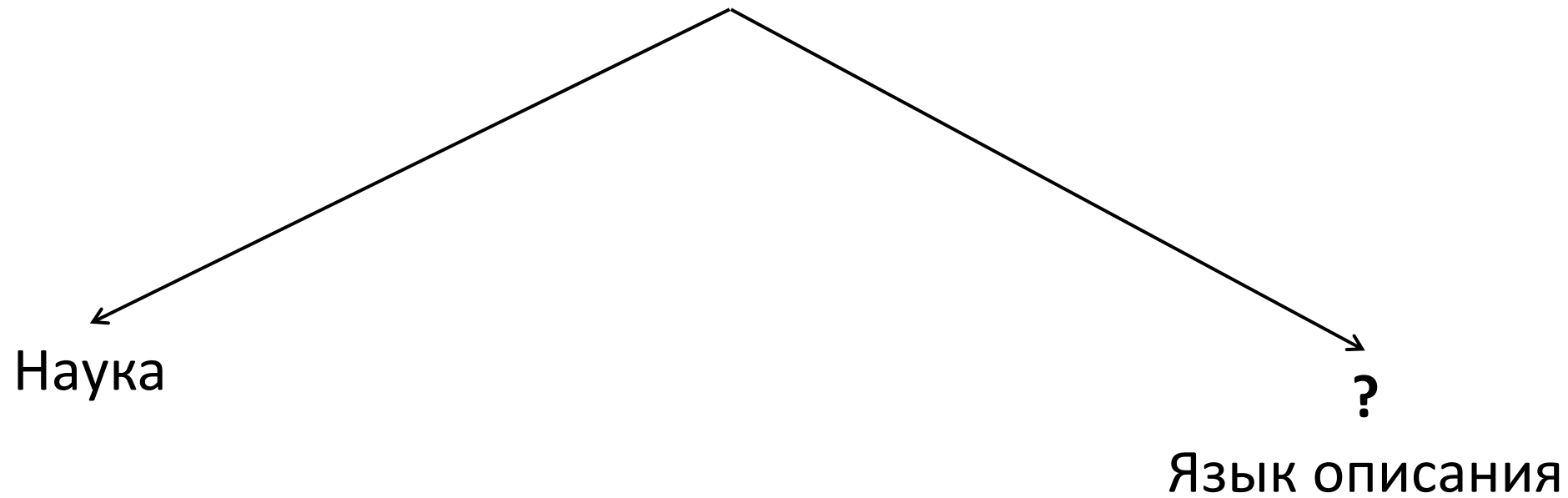


Математика

Наука

?

Язык описания



Математика

Наука

?

Язык описания

Математика является языком, на
котором Бог написал Вселенную



Математика

Наука

?

Язык описания

Математика является языком, на котором Бог написал Вселенную

Математика - это язык, на котором говорят все точные науки



Математика

Наука

?

Язык описания

Семантическая система

Инструмент формализации

Математика является языком, на котором Бог написал Вселенную

Математика - это язык, на котором говорят все точные науки



Математика

Наука

?

Язык описания

Семантическая система

Инструмент формализации

Забава для ума

Математика является языком, на котором Бог написал Вселенную

Математика - это язык, на котором говорят все точные науки



Математика

Наука



Математику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит

?

Язык описания

Семантическая система

Инструмент формализации

Забава для ума

Математика является языком, на
котором Бог написал Вселенную

Математика - это язык, на котором
говорят все точные науки



Математика

Наука



Математику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит

?

Язык описания

Семантическая система

Инструмент формализации

Забава для ума

Искусство!

Математика является языком, на
котором Бог написал Вселенную

Математика - это язык, на котором
говорят все точные науки



Математика

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Наука



Математику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит

?

Язык описания

Семантическая система

Инструмент формализации

Забава для ума

Искусство!

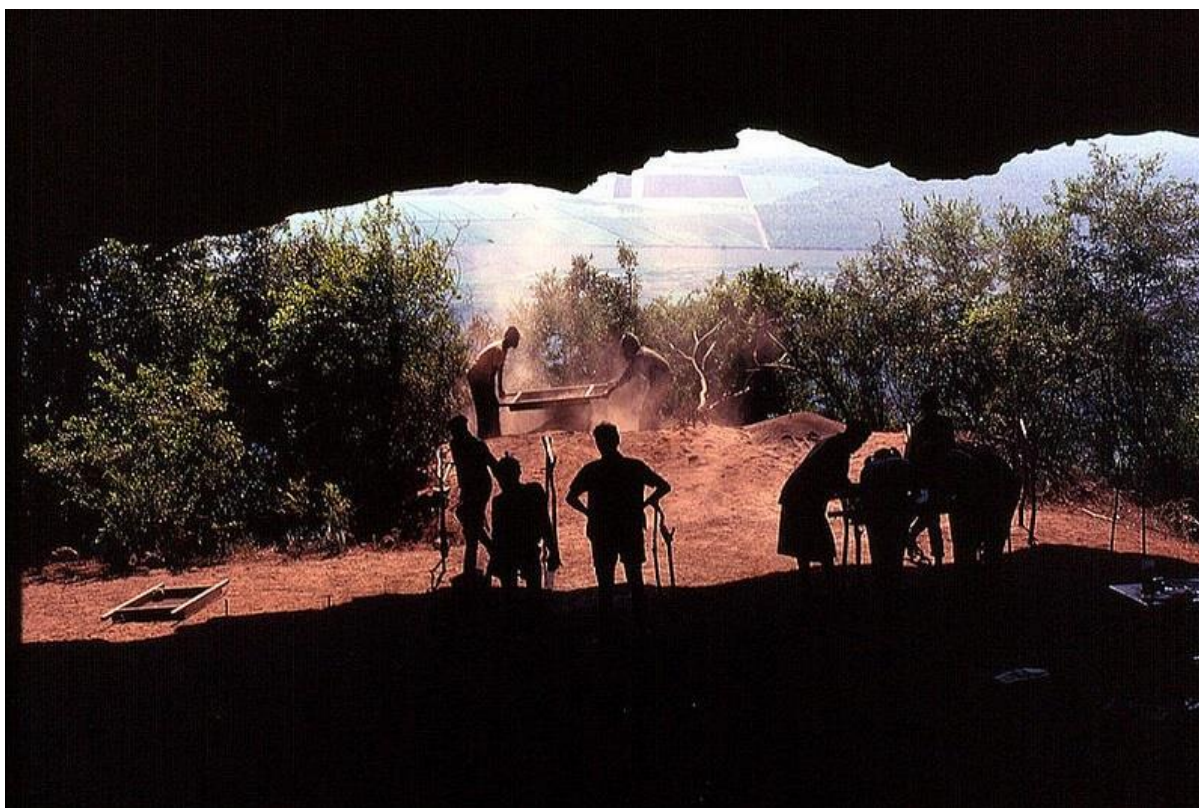
Математика является языком, на
котором Бог написал Вселенную

Математика - это язык, на котором
говорят все точные науки



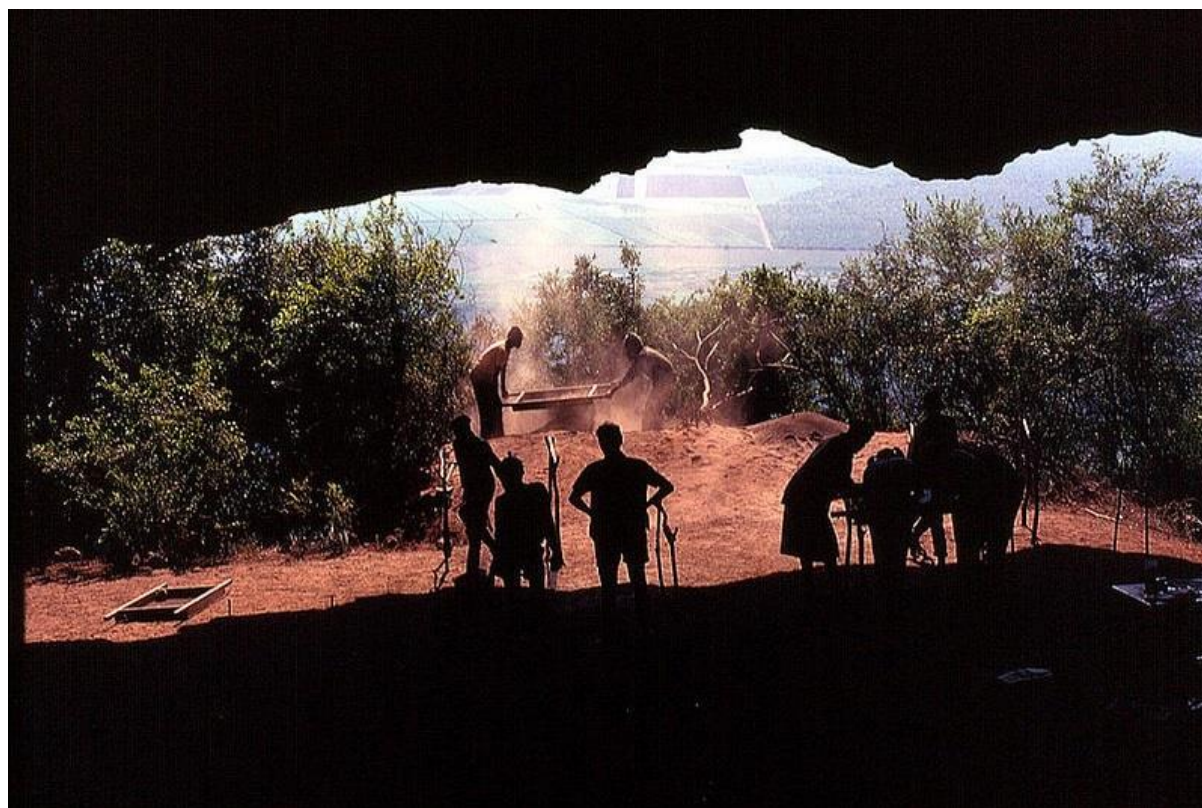


Lebombo bone
~ 35 000 BC

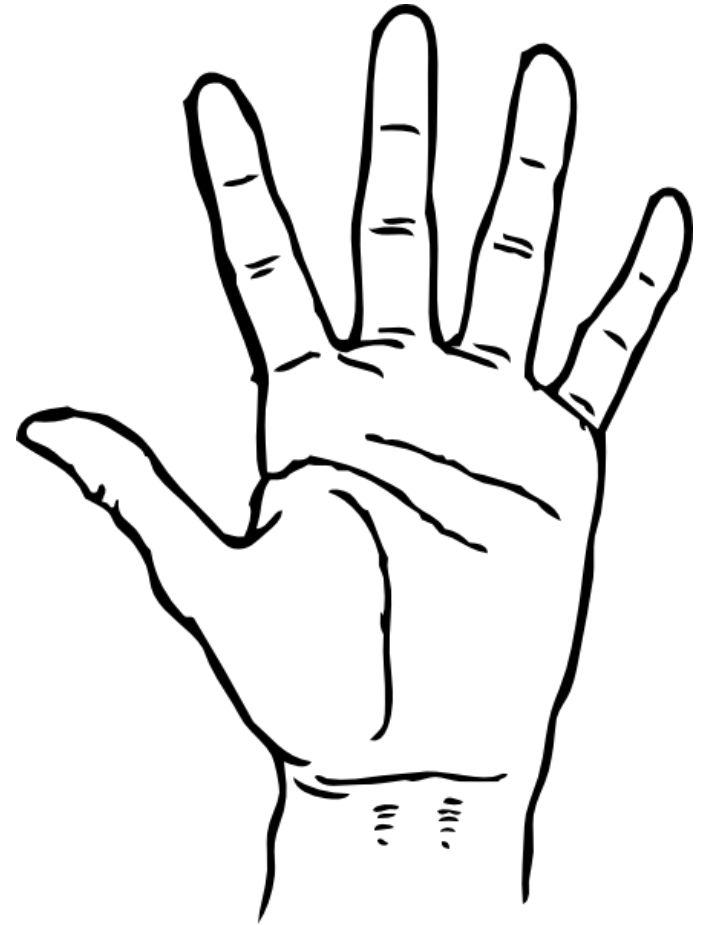




Lebombo bone
~ 35 000 BC

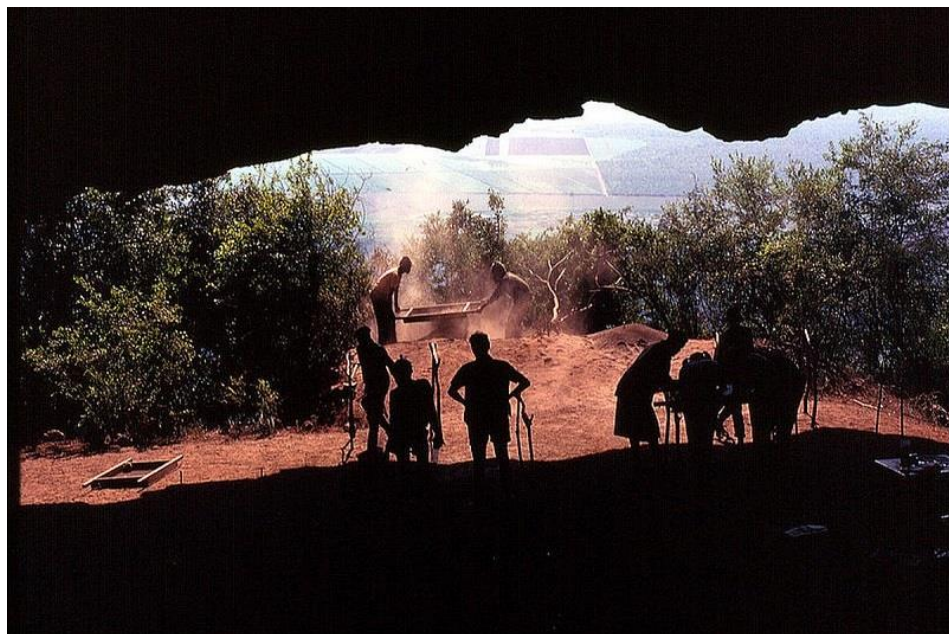


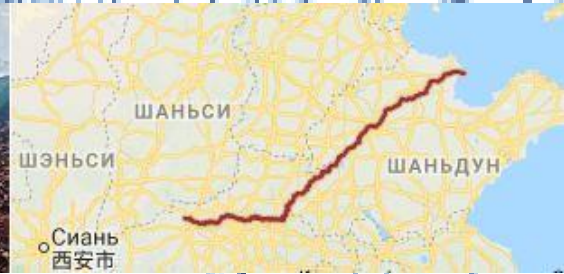
Tai	1	Otai («новое один»)	6
Lua	2	Olua («новое два»)	2
Tolu	3	Otolu («новое три»)	3
Vari	4	Ovari («новое четыре»)	4
Luna («рука»)	5	Lualuna («две руки»)	5



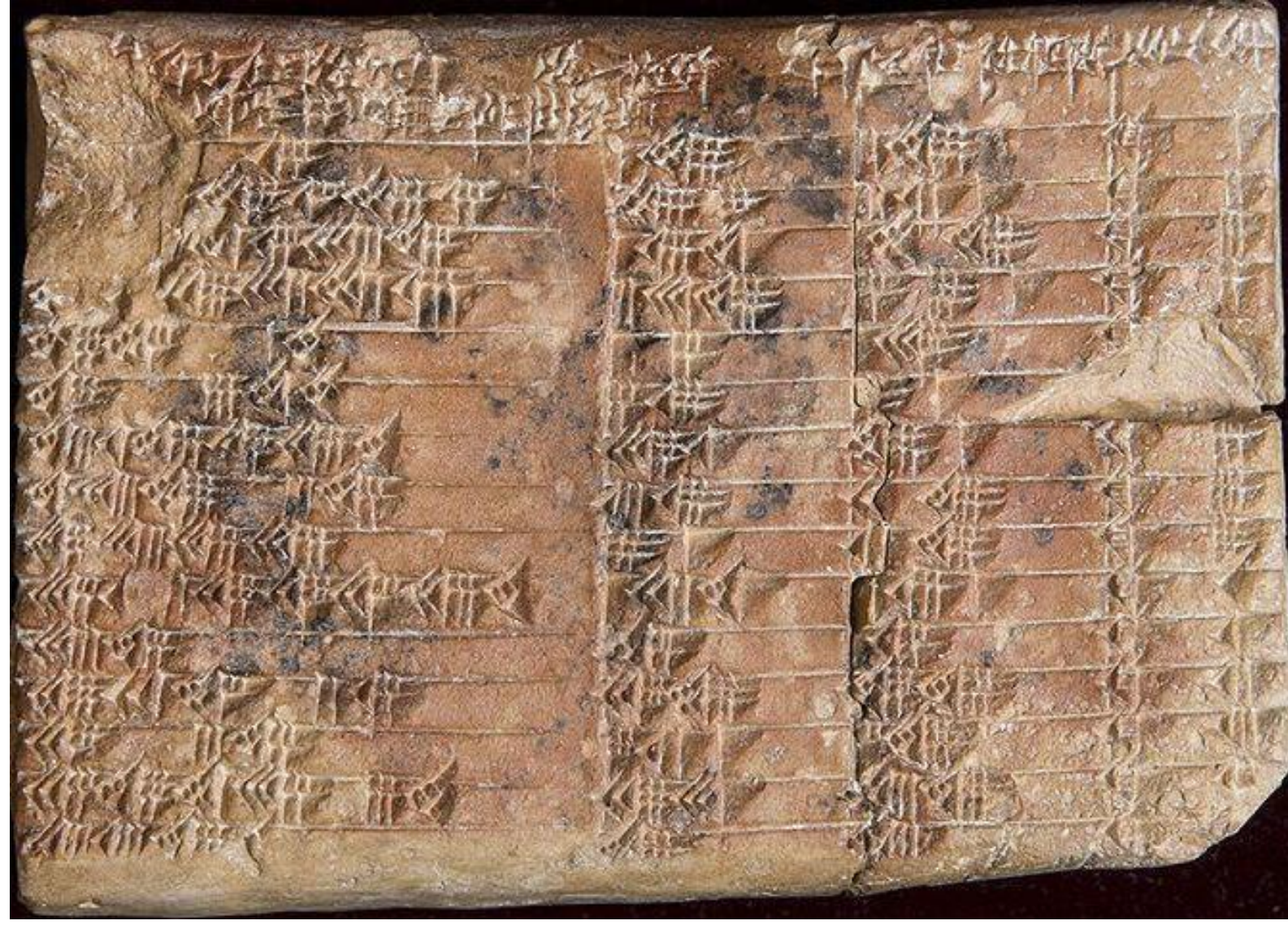


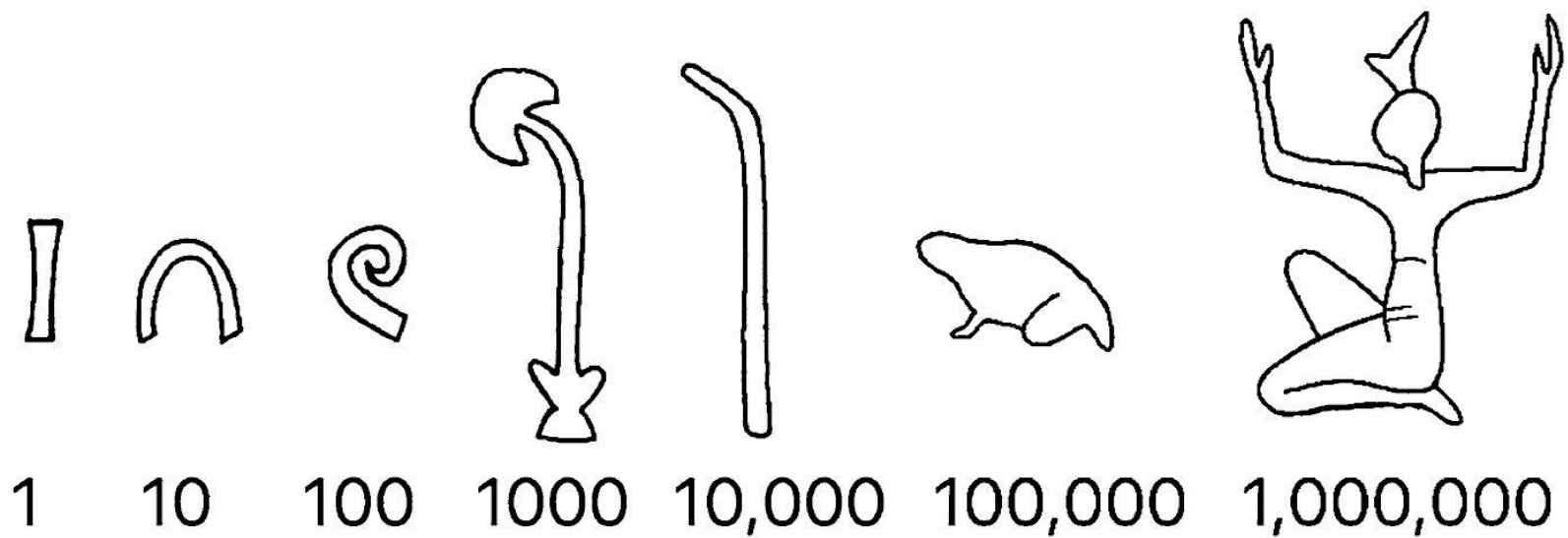
Lebombo bone
~ 35 000 BC



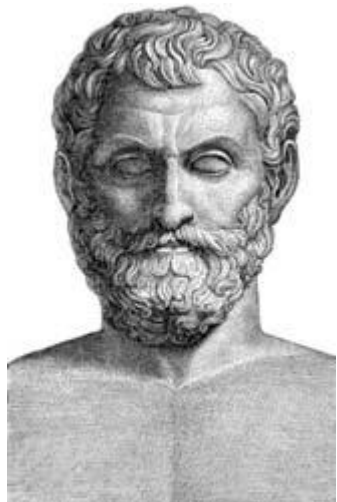






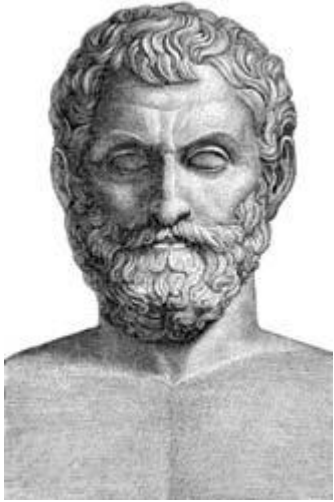


1	𐀀	11	𐀀𐀀	21	𐀀𐀀𐀀	31	𐀀𐀀𐀀𐀀	41	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀	51	𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
2	𐀁	12	𐀁𐀀	22	𐀁𐀀𐀀	32	𐀁𐀀𐀀𐀀	42	𐀁𐀀𐀀𐀀𐀀	52	𐀁𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
3	𐀂	13	𐀂𐀀	23	𐀂𐀀𐀀	33	𐀂𐀀𐀀𐀀	43	𐀂𐀀𐀀𐀀𐀀	53	𐀂𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
4	𐀃	14	𐀃𐀀	24	𐀃𐀀𐀀	34	𐀃𐀀𐀀𐀀	44	𐀃𐀀𐀀𐀀𐀀	54	𐀃𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
5	𐀄	15	𐀄𐀀	25	𐀄𐀀𐀀	35	𐀄𐀀𐀀𐀀	45	𐀄𐀀𐀀𐀀𐀀	55	𐀄𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
6	𐀅	16	𐀅𐀀	26	𐀅𐀀𐀀	36	𐀅𐀀𐀀𐀀	46	𐀅𐀀𐀀𐀀𐀀	56	𐀅𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
7	𐀆	17	𐀆𐀀	27	𐀆𐀀𐀀	37	𐀆𐀀𐀀𐀀	47	𐀆𐀀𐀀𐀀𐀀	57	𐀆𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
8	𐀇	18	𐀇𐀀	28	𐀇𐀀𐀀	38	𐀇𐀀𐀀𐀀	48	𐀇𐀀𐀀𐀀𐀀	58	𐀇𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
9	𐀈	19	𐀈𐀀	29	𐀈𐀀𐀀	39	𐀈𐀀𐀀𐀀	49	𐀈𐀀𐀀𐀀𐀀	59	𐀈𐀀𐀀𐀀𐀀𐀀
10	𐀉	20	𐀉𐀀	30	𐀉𐀀𐀀	40	𐀉𐀀𐀀𐀀	50	𐀉𐀀𐀀𐀀𐀀		



Фалес Милетский

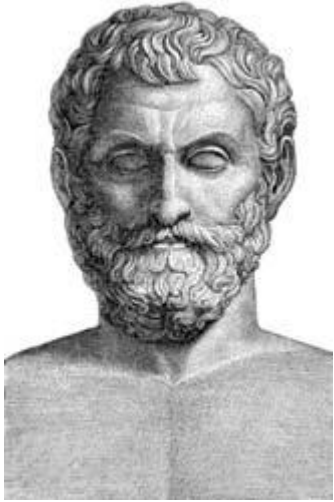
VII-VI вв. до нашей эры



Фалес Милетский

VII-VI вв. до нашей эры

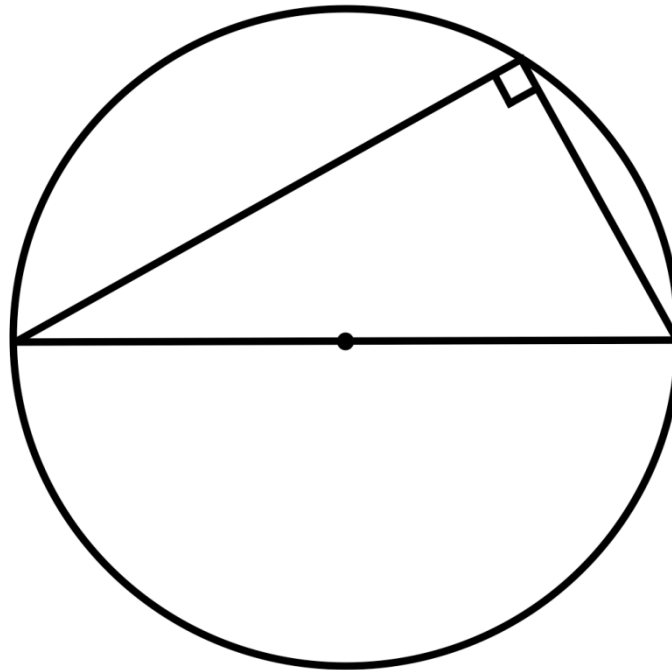
Теорема. Если треугольник вписан в окружность таким образом, что одна из сторон треугольника является диаметром этой окружности, то противоположный этой стороне угол является прямым углом.



Фалес Милетский

VII-VI вв. до нашей эры

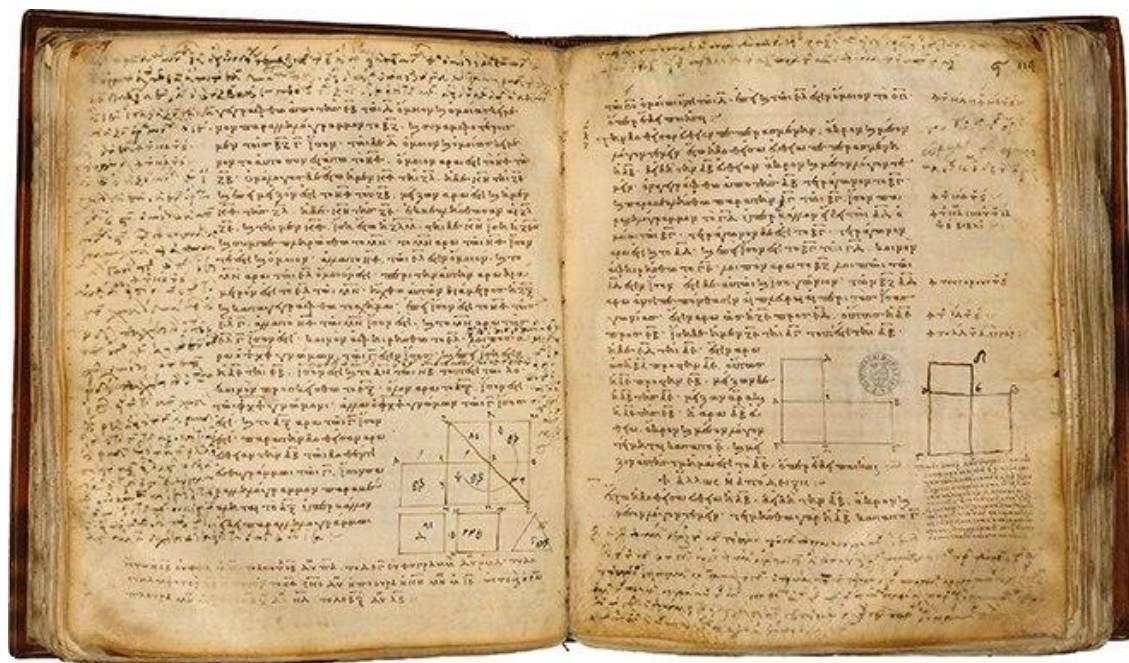
Теорема. Если треугольник вписан в окружность таким образом, что одна из сторон треугольника является диаметром этой окружности, то противоположный этой стороне угол является прямым углом.





Евклид

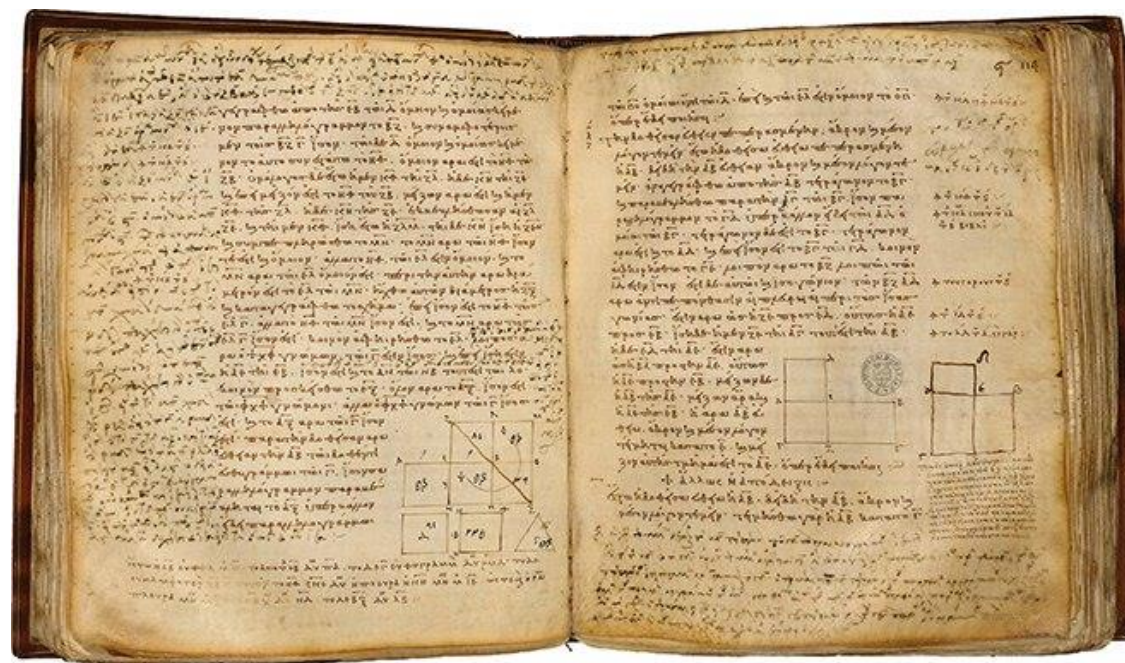
III в. до нашей эры





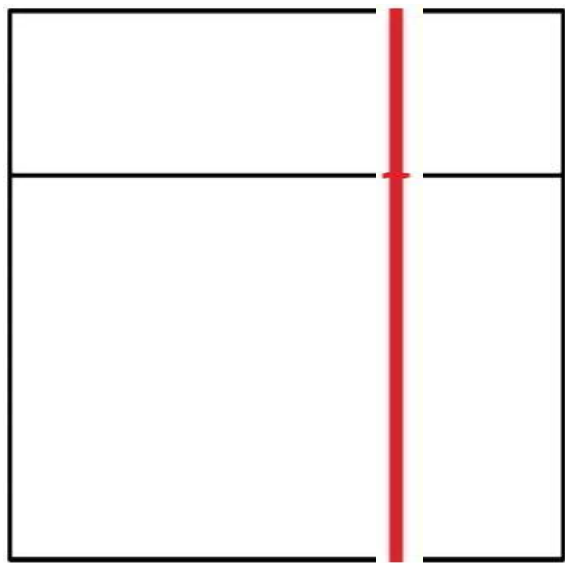
Евклид

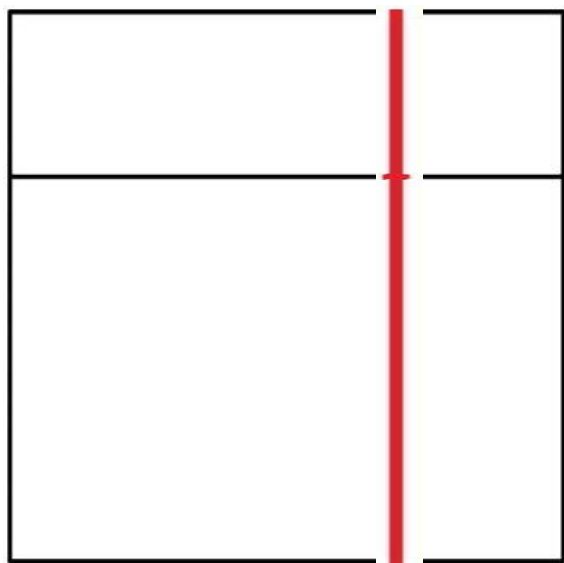
III в. до нашей эры



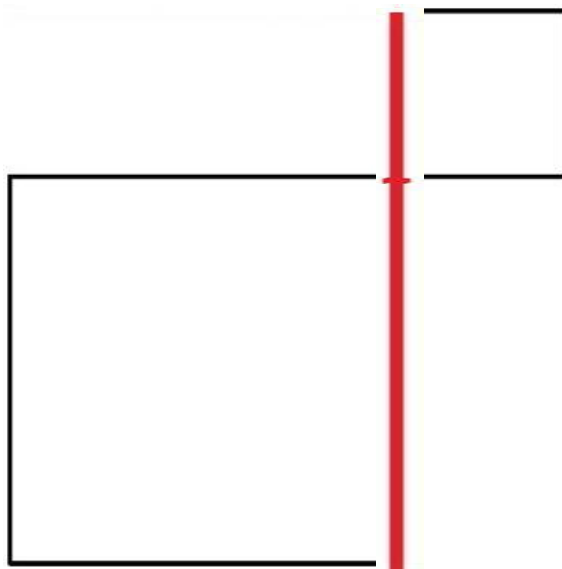
Теорема. Если прямую линию разделить на две части произвольным образом, то квадрат на всей линии равен сумме квадратов на двух её частях плюс дважды прямоугольник, составленный из этих частей.



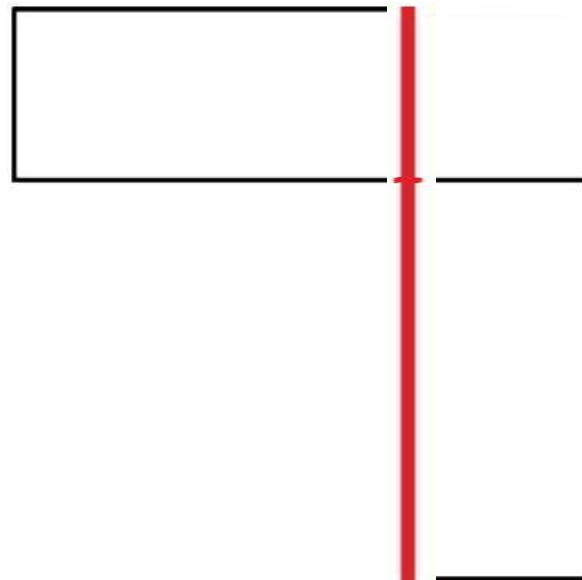




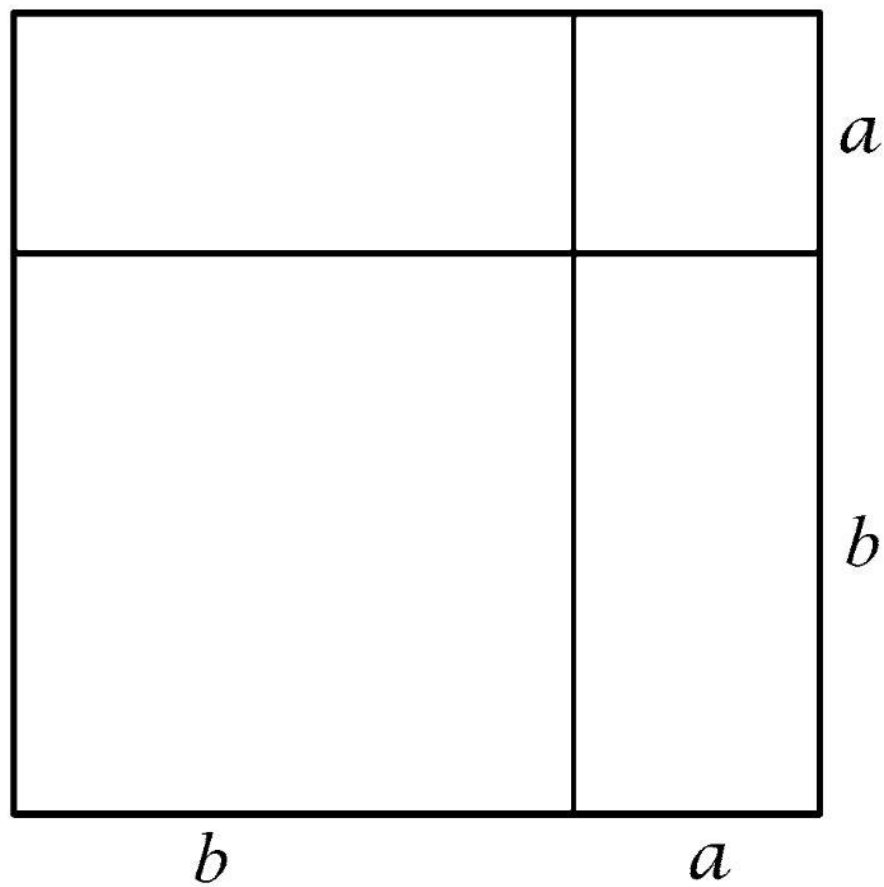
=

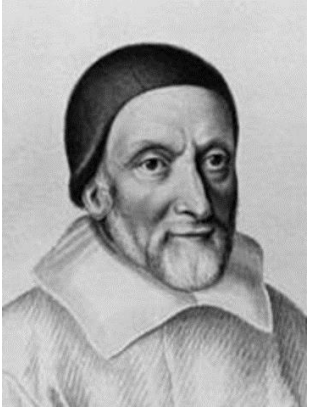


+



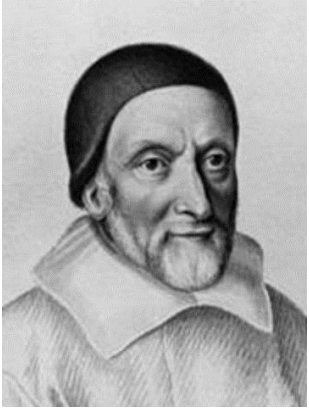
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$





Уильям Отред

XVII в. нашей эры



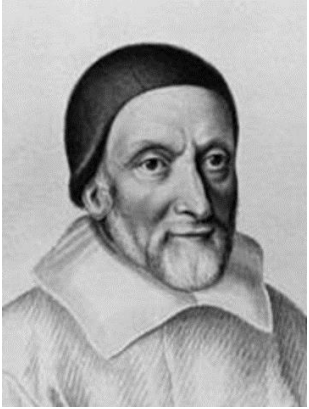
Уильям Отред
XVII в. нашей эры



Франсуа Виет
XVI в. нашей эры

$$ax + by = c$$

x и y являются неизвестными
 a , b и c — заданными



Уильям Отред
XVII в. нашей эры



Франсуа Виет
XVI в. нашей эры

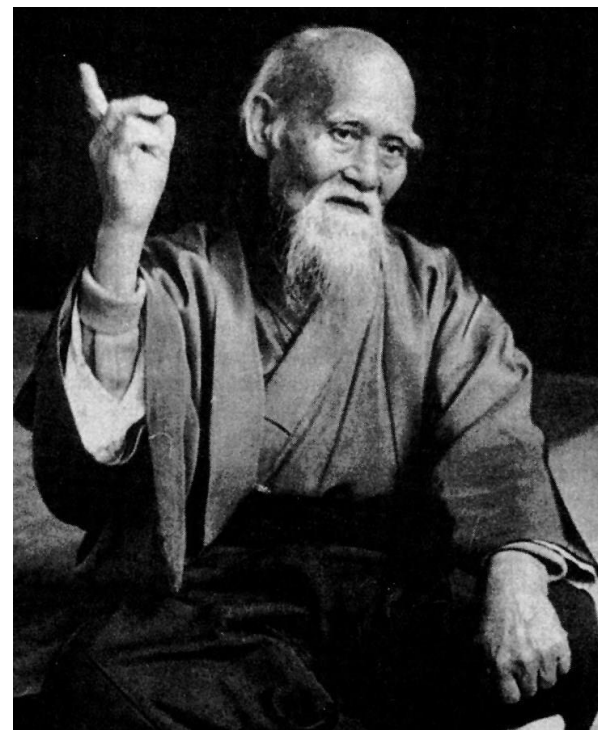
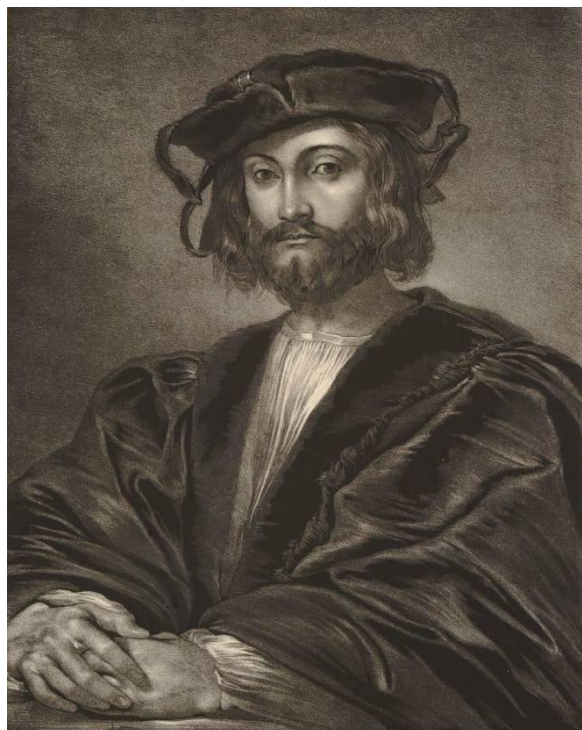


Диофант Александрийский
III в. нашей эры

$$ax + by = c$$

x и y являются неизвестными
 a , b и c – заданными

$$\circ \circ \text{---}1\text{---} \circ \circ$$





九章算經卷第一

魏劉徽注

唐朝議奏行次吏部輕重都尉畢季淳風等奉勅注釋

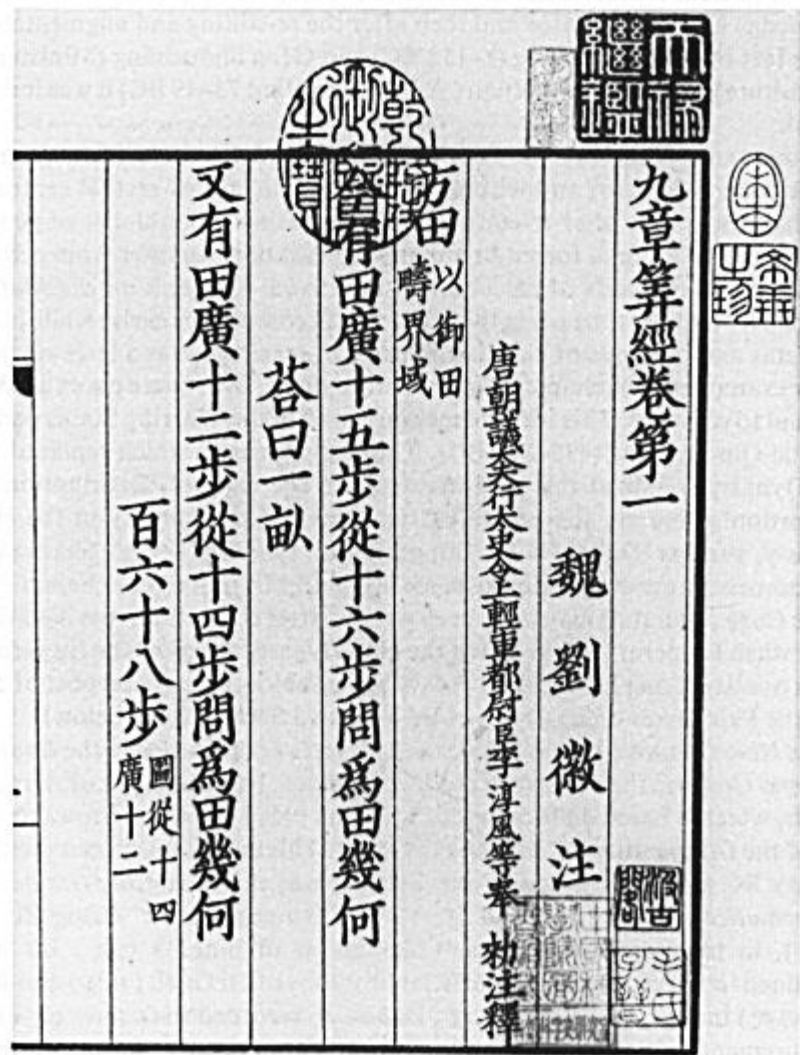
方田
以御田
疇界域

廣十五步從十六步問爲田幾何

答曰一畝

又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

百六十八步
圖從十四
廣十二



Лю Хуэй
III в. нашей эры

千 百 十 一 分 厘 毫 絲

									商	一 圖
≡		≡		└		└	└	└	實	
—	└	≡							方	
—		└	π						广	
		=		=					禺	
									三	
									四	

1	2	3	4	5	6	7	8	9

			一						商
三	三	三	一	上	三	上	丁	人	實
一	丁	三							方
一	二	上	π						广
		=	一	=					周
			三						三
			二						四

II	T	III		
III	II	=I		
III	I	III		
≡II	⊥II			

© 2006 Encyclopædia Britannica, Inc.

$$3x + 21y - 3z = 0$$

$$-6x - 2y - z = 62$$

$$2x - 3y + 8z = 32$$



Леонардо Пизанский

XIII в. нашей эры



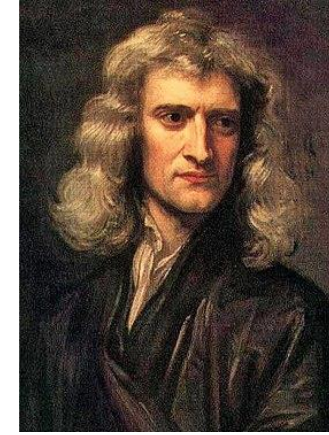
Леонардо Пизанский

XIII в. нашей эры



Джон Валлис

XVII в. нашей эры

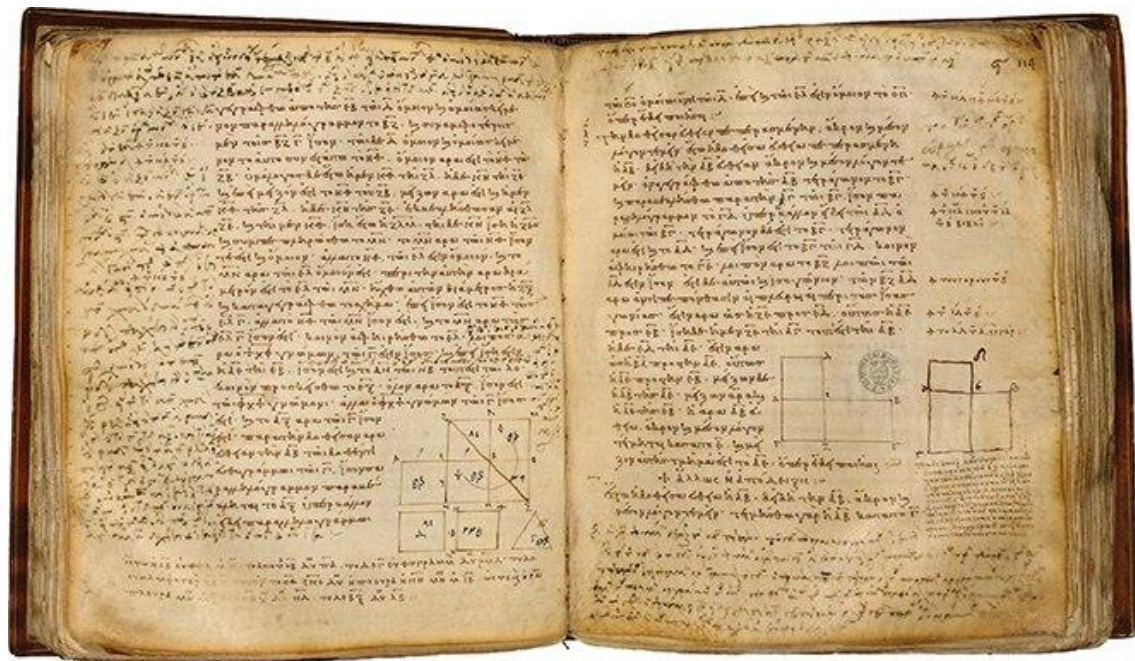


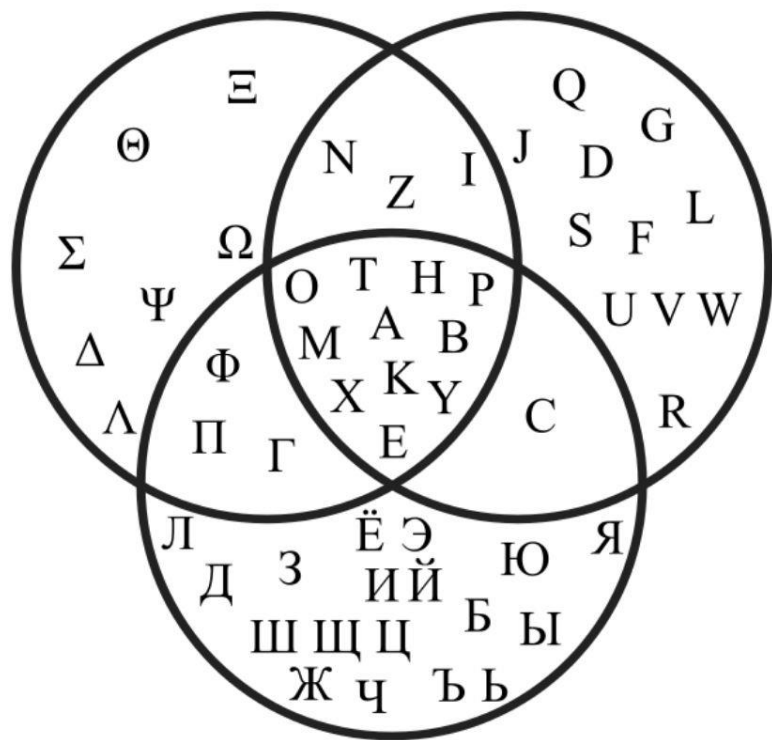
Исаак Ньютон

XVII в. нашей эры

Если + означает Вверх, Вперед, Усиление, Увеличение, Выше, Перед, Сложение, и т.д., то – следует интерпретировать как Вниз, Назад, Потеря, Уменьшение, Вычитание, и т.д. И если + понимать в этом смысле, то – следует интерпретировать противоположным образом.

Валлис, 1685







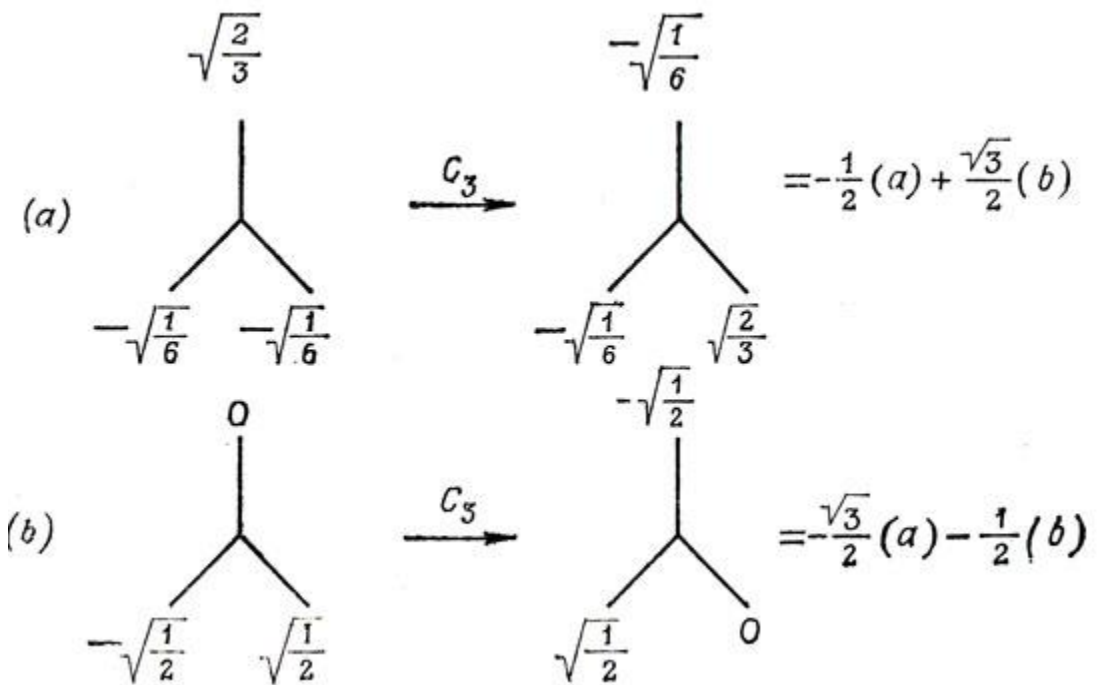
Георг Кантор
XIX в. нашей эры



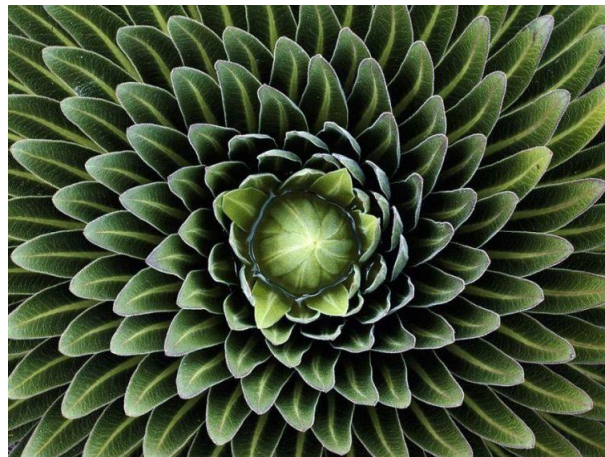
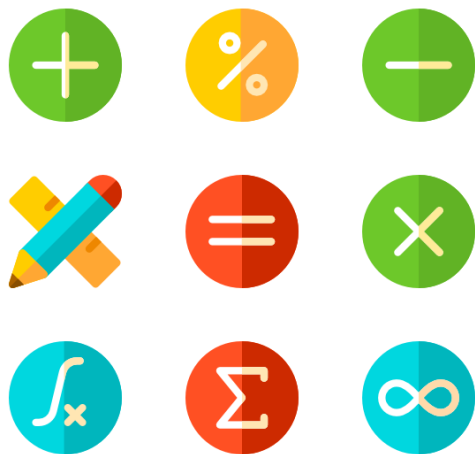
Георг Кантор

XIX в. нашей эры

$$\infty \neq \infty ?$$

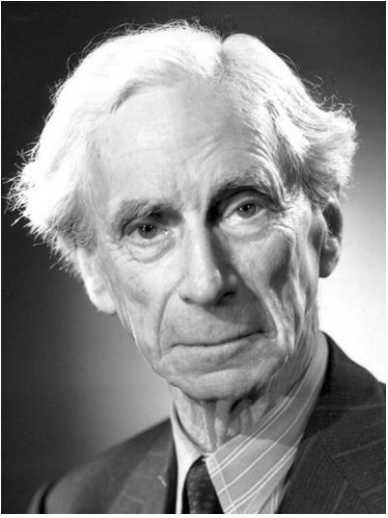


Математика –
наука о
структурах,
порядке и
отношениях



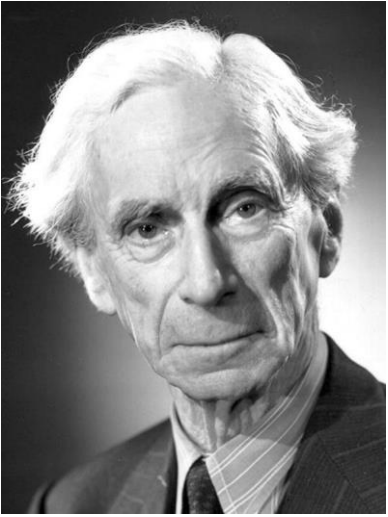
1. Математическое утверждение может содержать только то, что выразимо в виде строгого утверждения некой всеобщности.
2. Математика может работать с тем и выражать то, что выражаемо математикой.
3. Математика – это бесконечный набор тождеств, а также изоморфных отношений между разными дескриптивными способами выражения математических идей и утверждений.

Математика как технология мышления



Бертран Рассел

XX в. нашей эры

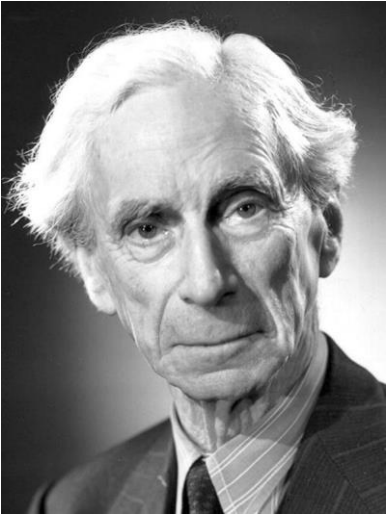


«... [получал от математики] нечто аналогичное религиозному искуплению.»

Рассел, 1959

Бертран Рассел

XX в. нашей эры



Бертран Рассел
XX в. нашей эры

«... [получал от математики] нечто аналогичное религиозному искуплению.»

Рассел, 1959



Числа Фибоначчи

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765 10946 17711 ...

Золотое сечение



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$

$$x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} a$$

$\Rightarrow$

$$b \approx 1,618a$$

$$\frac{2}{1} = 2 \quad \frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{5}{3} = 1,67 \quad \frac{8}{5} = 1,6 \quad \frac{13}{8} = 1,625 \quad \rightarrow \quad 1,618 \dots$$

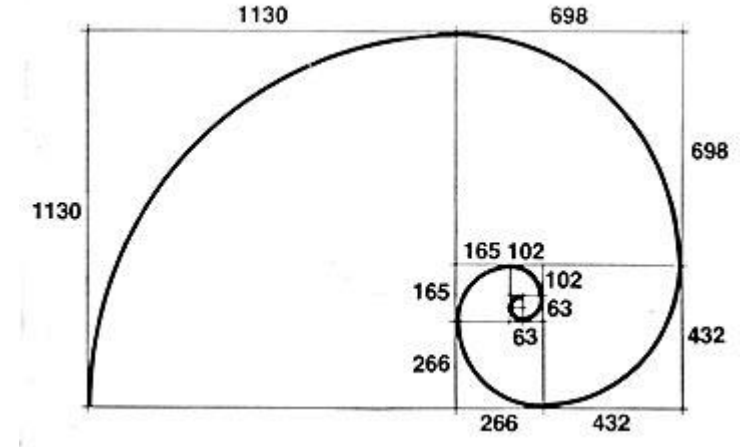
$$\frac{2}{1} = 2$$

$$\frac{3}{2} = 1,5$$

$$\frac{5}{3} = 1,67$$

$$\frac{8}{5} = 1,6$$

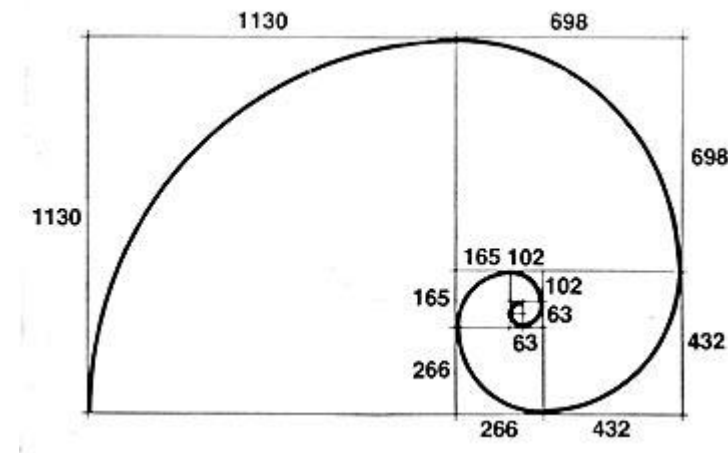
$$\frac{13}{8} = 1,625 \quad \rightarrow \quad 1,618 \dots$$



$$\frac{2}{1} = 2 \quad \frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{5}{3} = 1,67 \quad \frac{8}{5} = 1,6 \quad \frac{13}{8} = 1,625 \quad \rightarrow \quad 1,618 \dots$$

Числа Фибоначчи – рекуррентное соотношение:

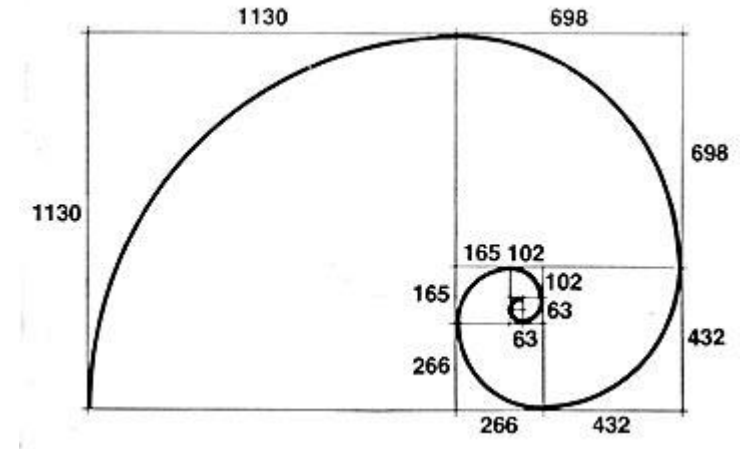
$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$$



$$\frac{2}{1} = 2 \quad \frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{5}{3} = 1,67 \quad \frac{8}{5} = 1,6 \quad \frac{13}{8} = 1,625 \quad \rightarrow \quad 1,618 \dots$$

Числа Фибоначчи – рекуррентное соотношение:

$$x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$$



1. Математика учит навыку «не понимать».

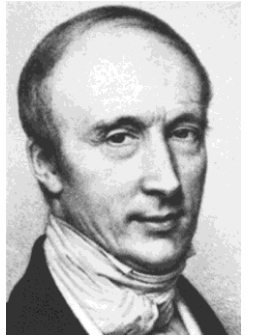
1. Математика учит навыку «не понимать».
2. Математика учит думать самостоятельно.

1. Математика учит навыку «не понимать».
2. Математика учит думать самостоятельно.
3. Математика учит культуре взаимодействия.

1. Математика учит навыку «не понимать».
2. Математика учит думать самостоятельно.
3. Математика учит культуре взаимодействия.
4. Математика учит быть честным с собой.

1. Математика учит навыку «не понимать».
2. Математика учит думать самостоятельно.
3. Математика учит культуре взаимодействия.
4. Математика учит быть честным с собой.
5. Математика учит работать добросовестно.

Теорема. Если слагаемые ряда $(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)$ являются функциями переменной x , непрерывными в окрестности определенного значения, при котором ряд сходится, то сумма ряда является так же непрерывной функцией в окрестности этого значения. (Коши, 1821)



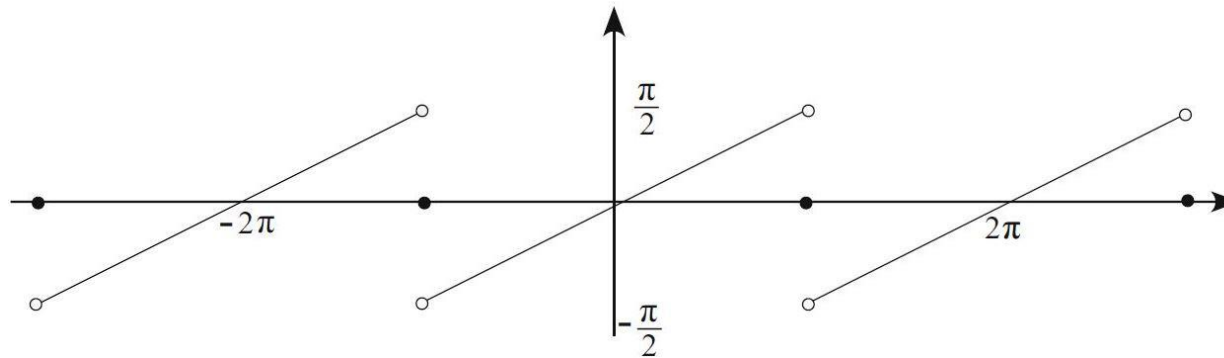
Огюстен Луи Коши

XIX в. нашей эры

Теорема. Если слагаемые ряда $(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)$ являются функциями переменной x , непрерывными в окрестности определенного значения, при котором ряд сходится, то сумма ряда является так же непрерывной функцией в окрестности этого значения. (Коши, 1821)

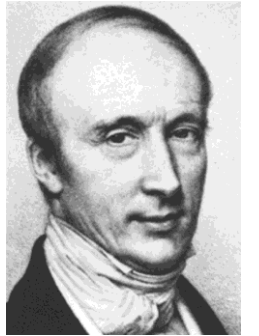
Контрпример Абеля:

$$\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots$$



Точки «потери» непрерывности:

$$x = (2k + 1)\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$



Огюстен Луи Коши
XIX в. нашей эры



Нильс Хенрик Абель
XIX в. нашей эры

Теорема. Если слагаемые сходящегося ряда $(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)$ являются непрерывными функциями переменной x , то сумма ряда является так же непрерывной функцией. (Коши, 1853)

Теорема. Если слагаемые сходящегося ряда $(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)$ являются непрерывными функциями переменной x , то сумма ряда является так же непрерывной функцией. (Коши, 1853)

- «для любого x существует u такой, что ...»
- «существует u такой, что для любого x ...»

Теорема. Если слагаемые сходящегося ряда $(u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots)$ являются непрерывными функциями переменной x , то сумма ряда является так же непрерывной функцией. (Коши, 1853)

- «для любого x существует u такой, что ...»
- «существует u такой, что для любого x ...»

- «сходится при любом значении x »
- «сходится при любом x »



Уильям Блейк
XIX в. нашей эры

Не дай Бог, чтобы Истина была заключена только в математическом доказательстве.

Уильям Блейк





Математика – это не естественный для человека способ мыслить,
а порожденная им технология.



Математика – это не естественный для человека способ мыслить, а порожденная им технология.



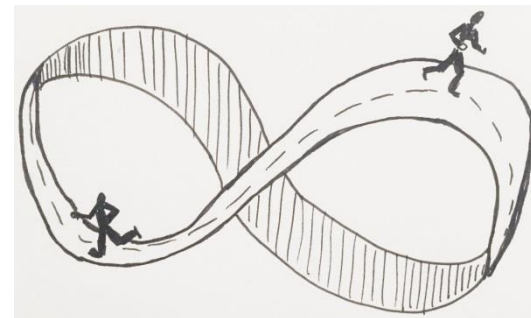
Андре Вейль
XX в. нашей эры

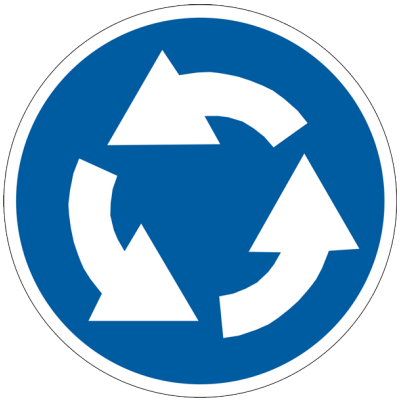
Бог есть, ибо математика непротиворечива, а Дьявол есть потому, что мы не можем этого строго доказать.

Андре Вейль

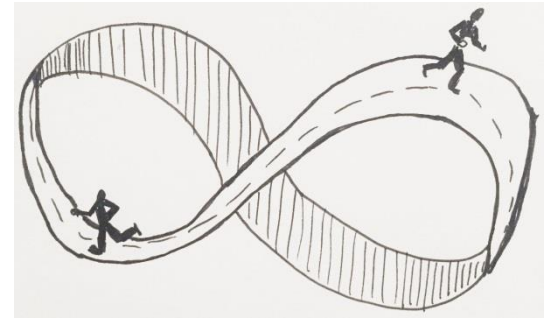


Математика развивает интуицию
или
интуиция развивает математику?

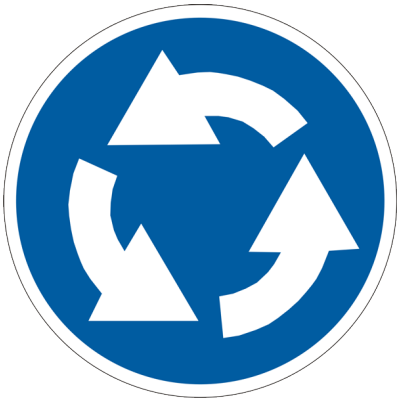




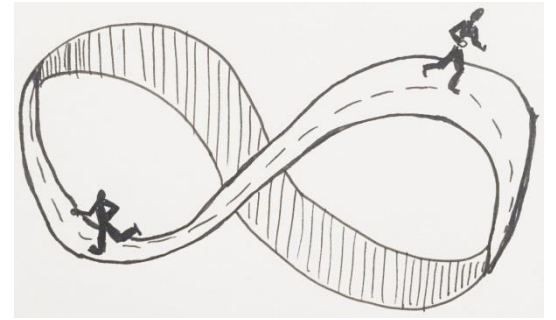
Математика развивает интуицию
или
интуиция развивает математику?



Анри Пуанкаре
XIX в. нашей эры



Математика развивает интуицию
или
интуиция развивает математику?



Анри Пуанкаре
XIX в. нашей эры

Среди его самых крупных достижений:

- Создание топологии.
- Качественная теория дифференциальных уравнений.
- Теория автоморфных функций.
- Разработка чрезвычайно эффективных методов небесной механики.
- Создание математических основ теории относительности.
- Обобщение принципа относительности на все физические явления.
- Наглядная модель геометрии Лобачевского.

Технология:

Собирать «идеальные» кейсы или проблемности, которые строго разрешаемы, вырабатывать язык их описания.

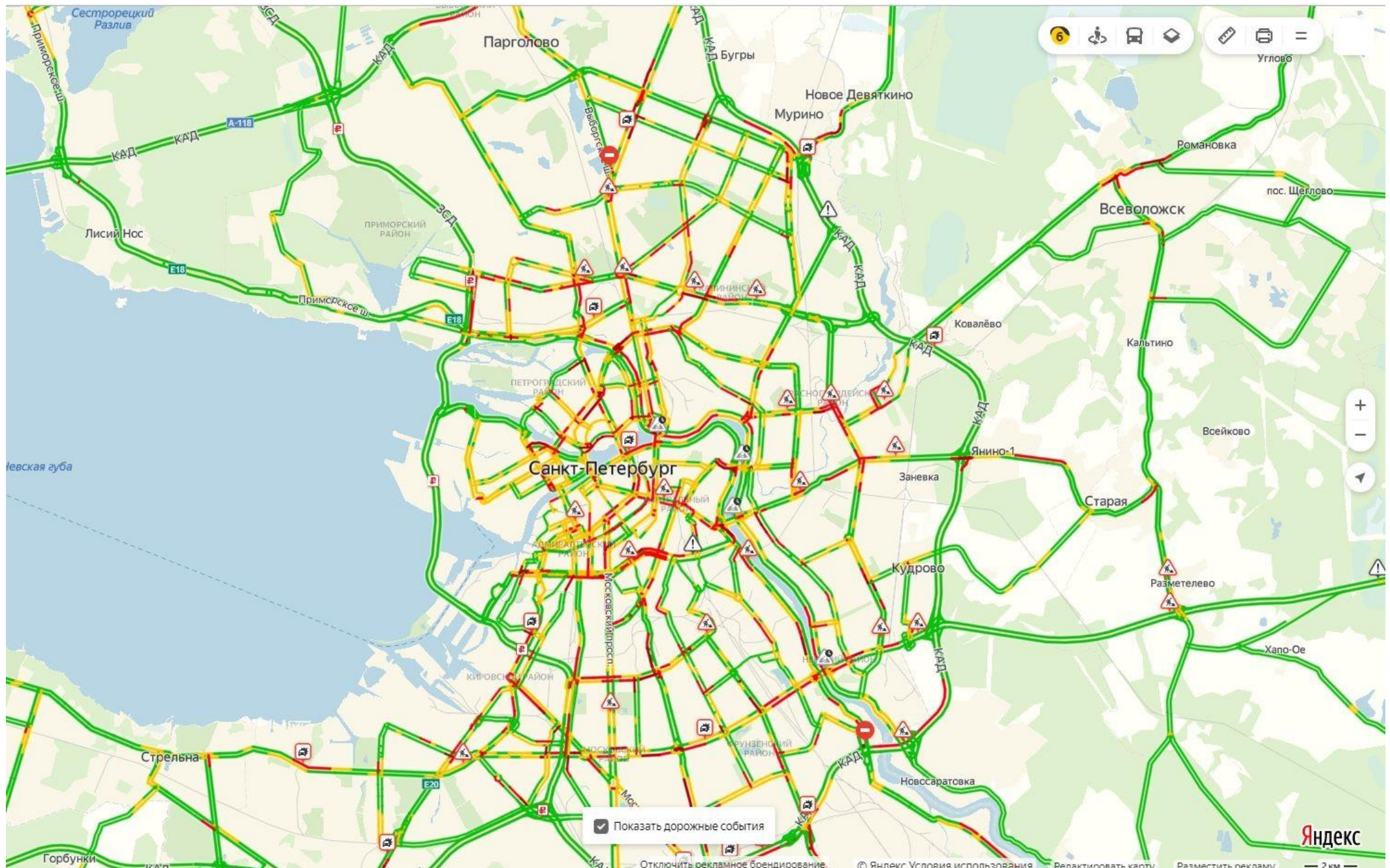
Сводить реальные задачи к таким «идеальным» проблемностям, относительно которых «доказана» разрешаемость.

Математика как инструмент постановки и решения задач

1. Инструмент уточняет задачу.

1. Инструмент уточняет задачу.
2. Теоремы существования.

1. Инструмент уточняет задачу.
2. Теоремы существования.
3. Теоремы единственности.



$G = (V, E)$ - ориентированный граф

$$W \subseteq V \times V$$

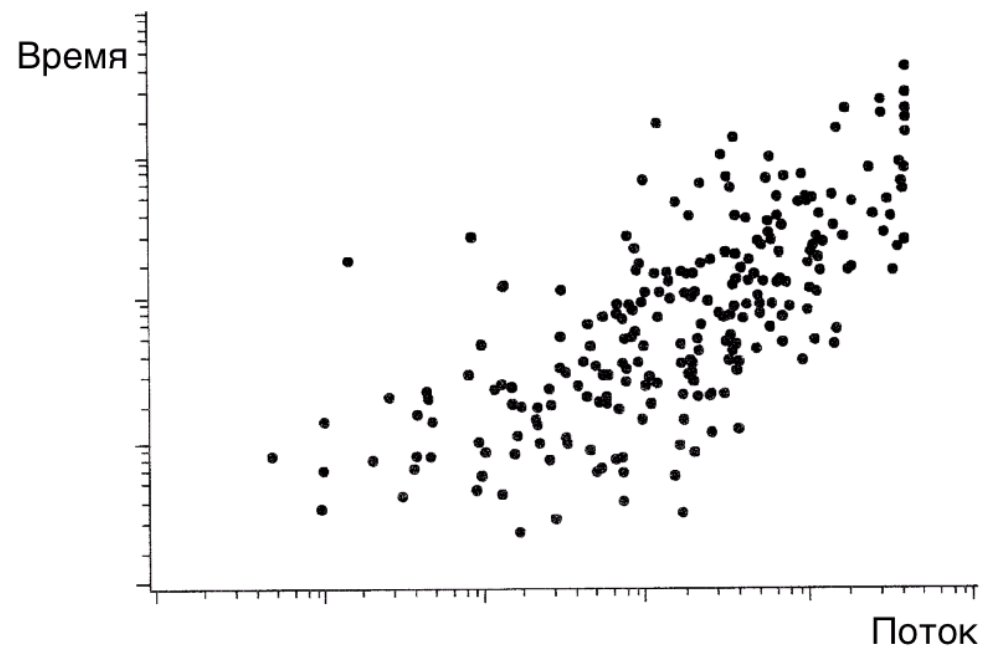
$$\min_x \sum_{e \in E} \int_0^{x_e} t_e(u) du,$$

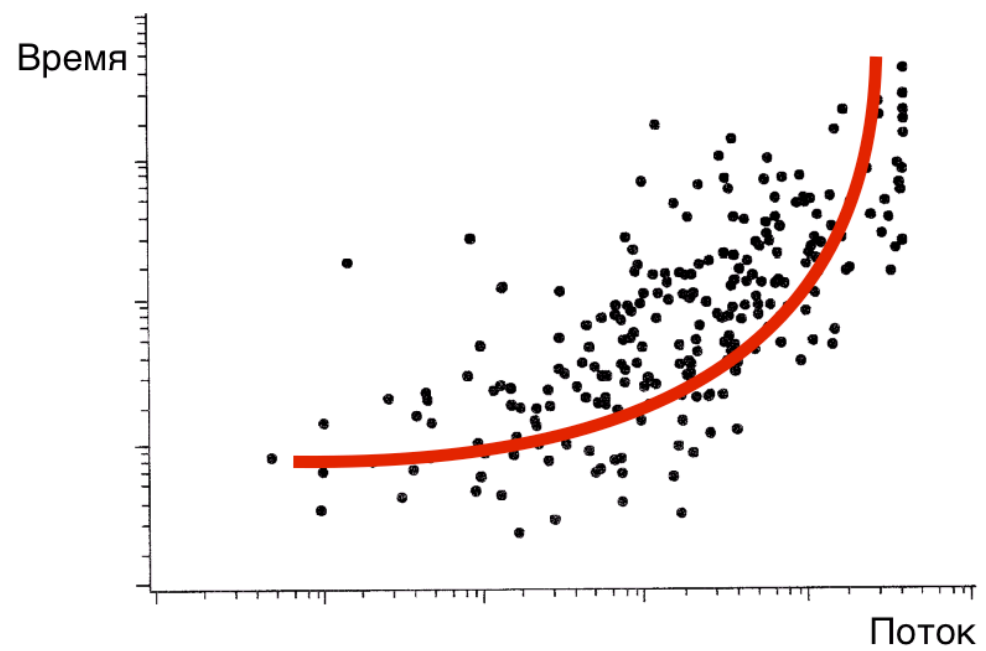
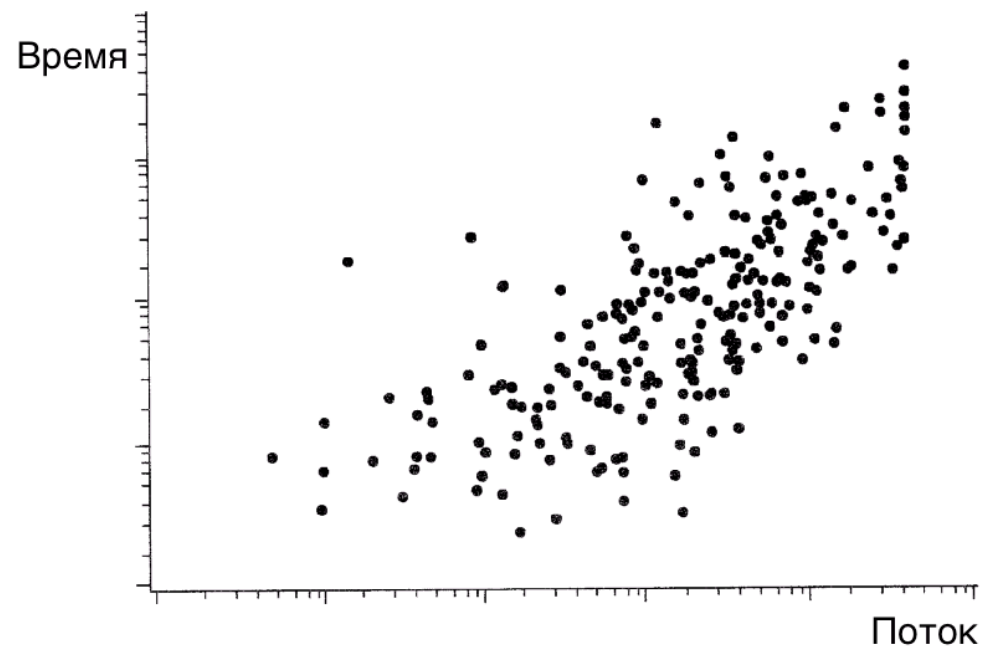
при ограничениях

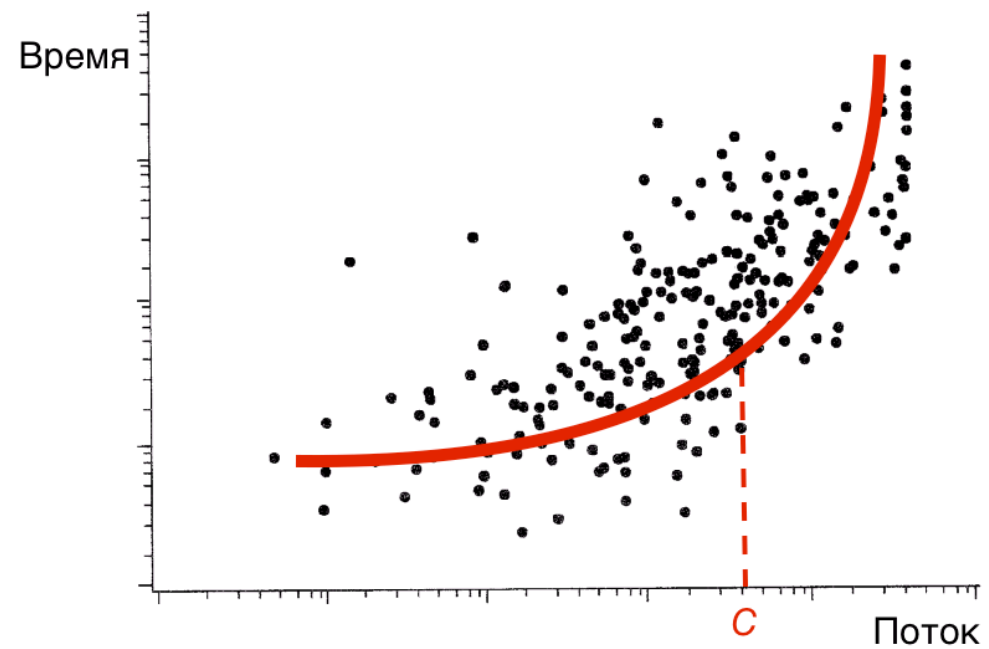
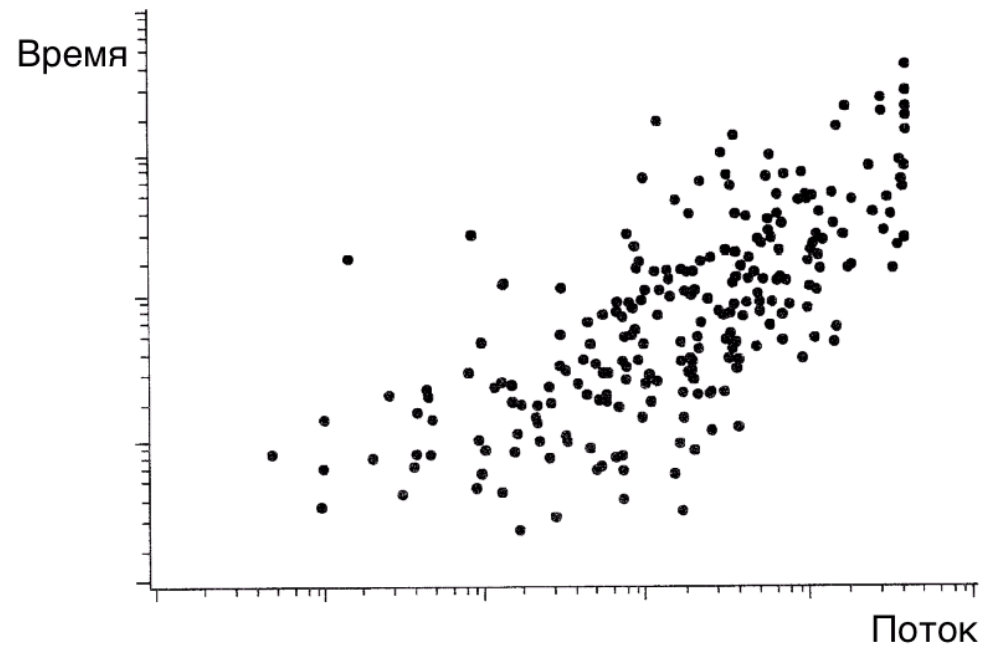
$$\sum_{r \in R^w} f_r^w = F^w \quad \forall w \in W,$$
$$f_r^w \geq 0 \quad \forall r \in R^w, w \in W,$$

и выполнении соотношений

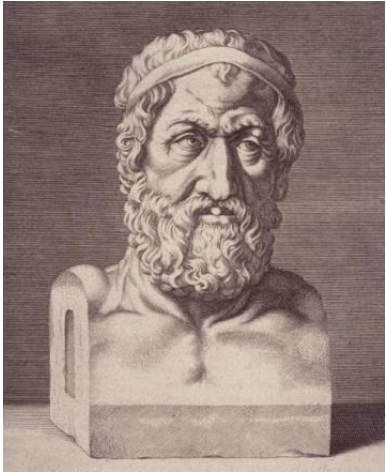
$$x_e = \sum_{w \in W} \sum_{r \in R^w} f_r^w \delta_{e,r}^w \quad \forall e \in E.$$





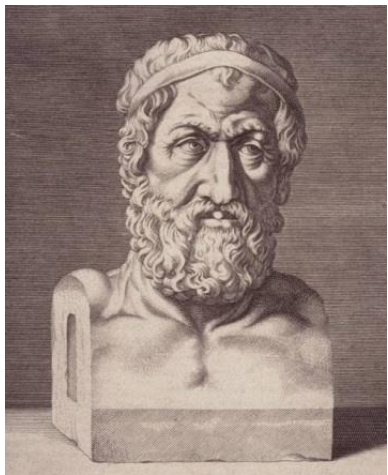


Математические парадоксы и их преодоление



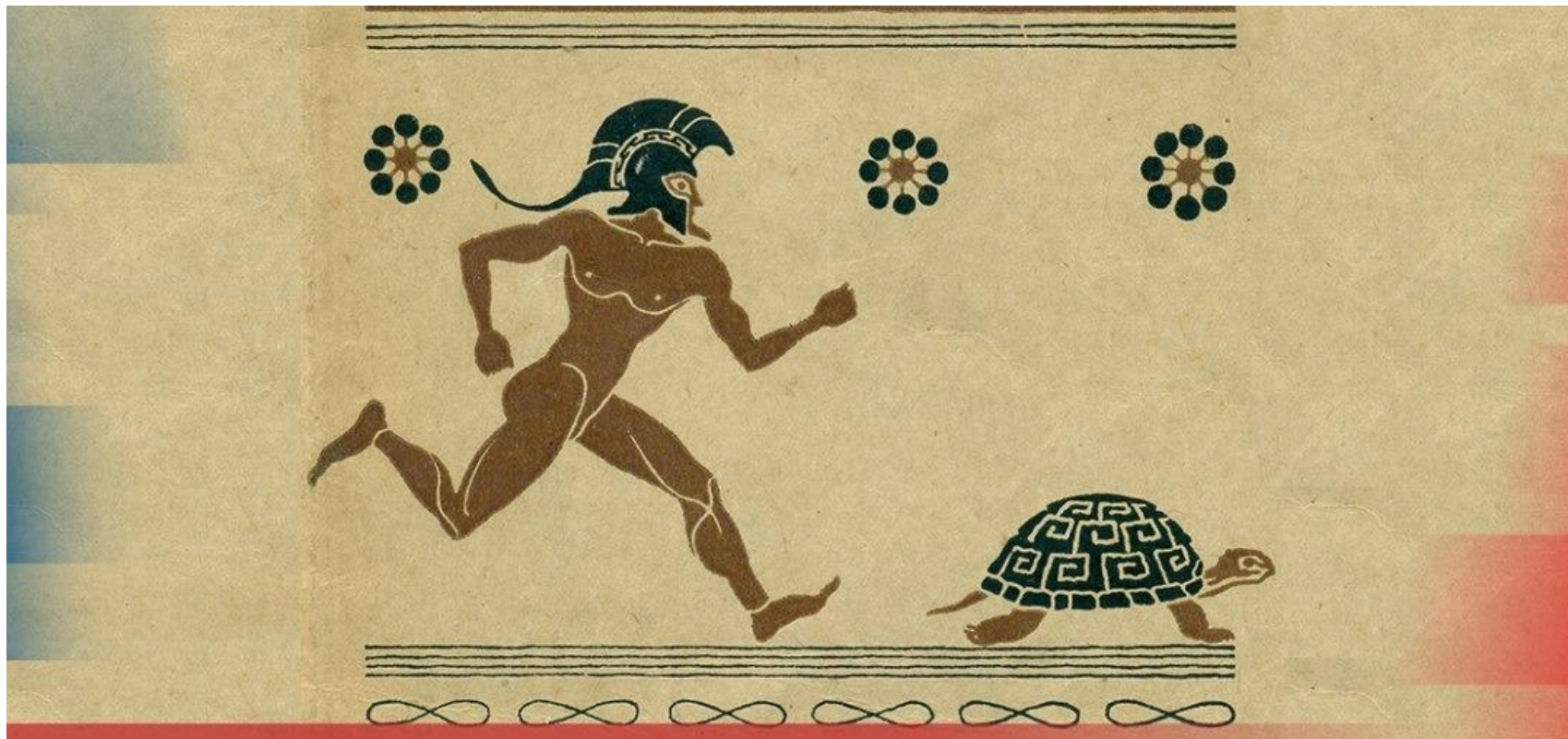
Зенон Элейский

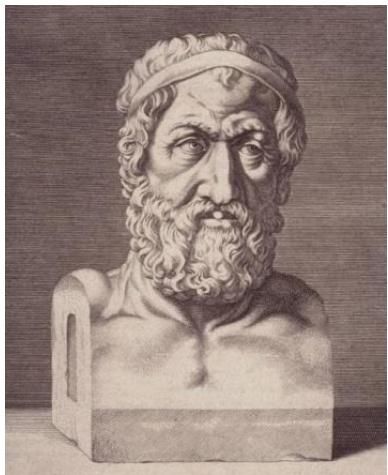
V в. до нашей эры



Зенон Элейский

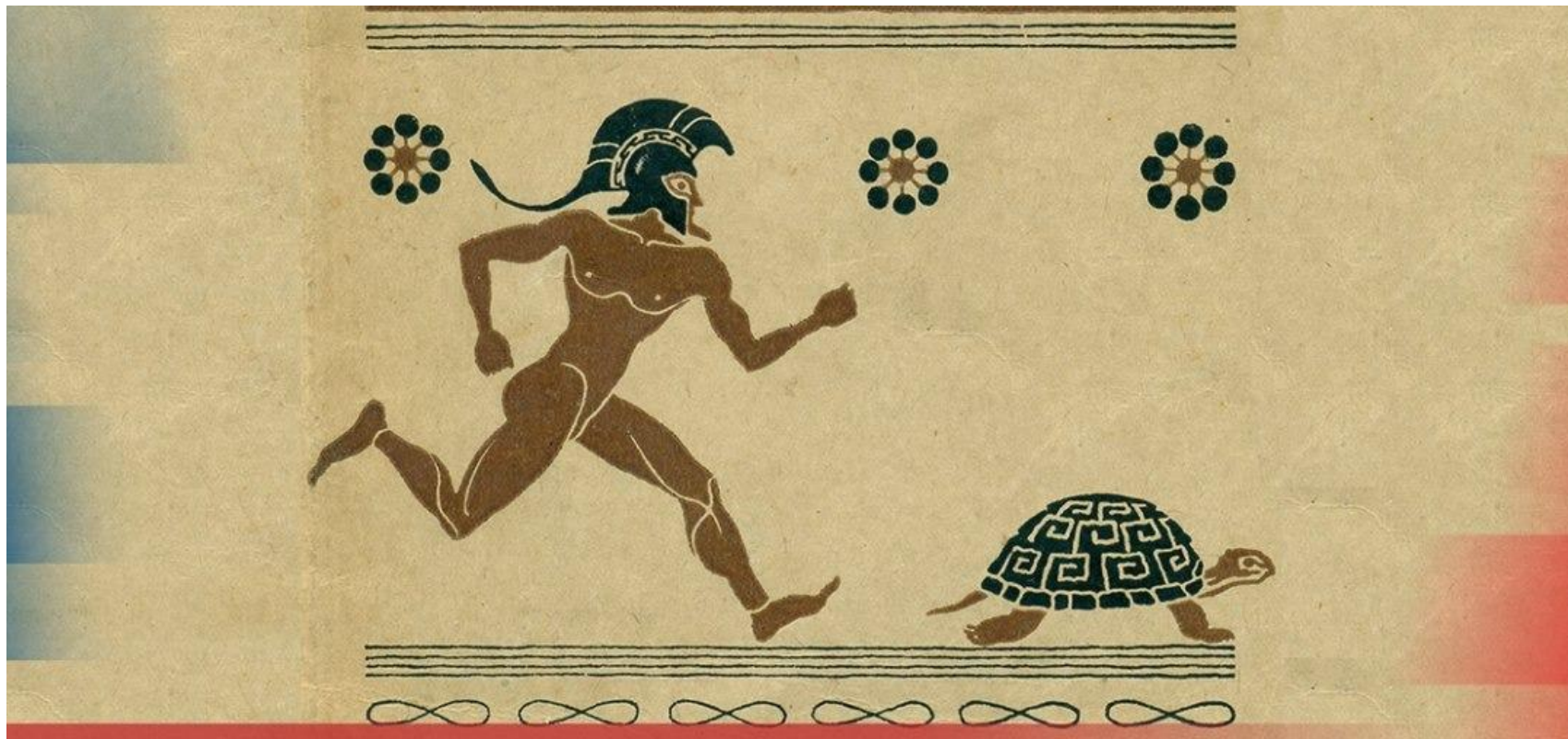
V в. до нашей эры



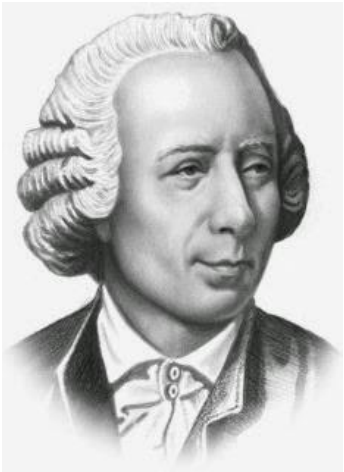


Зенон Элейский

V в. до нашей эры

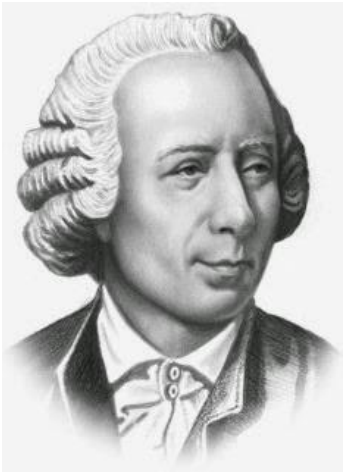


$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 2$$



Леонард Эйлер

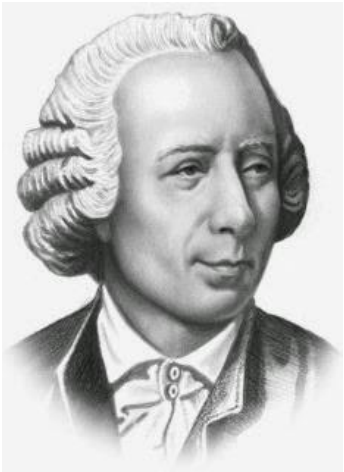
XVIII в. нашей эры



Леонард Эйлер

XVIII в. нашей эры

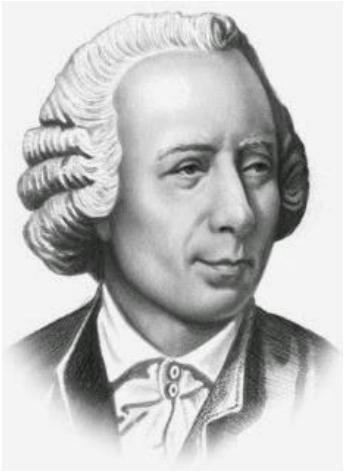
$$\frac{1}{1+x}$$



Леонард Эйлер

XVIII в. нашей эры

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

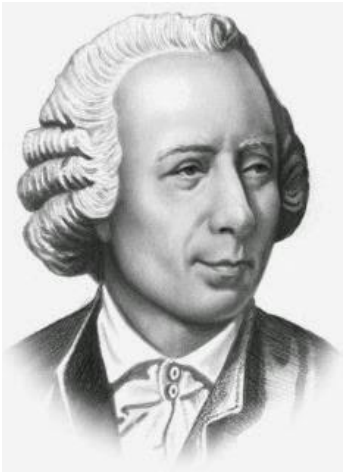


Леонард Эйлер

XVIII в. нашей эры

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$$



Леонард Эйлер

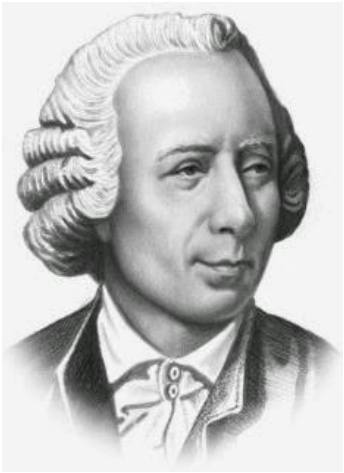
XVIII в. нашей эры

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$$



$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$



Леонард Эйлер

XVIII в. нашей эры

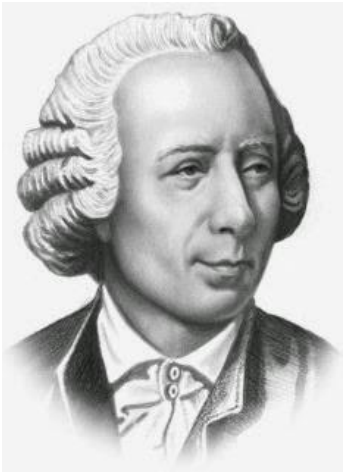
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$$



$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$



Леонард Эйлер

XVIII в. нашей эры

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$$

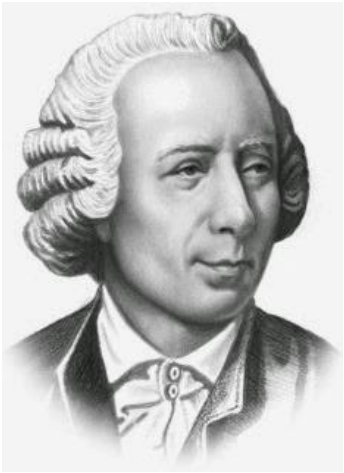


$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$



$$\infty < -1$$



Леонард Эйлер

XVIII в. нашей эры

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$$



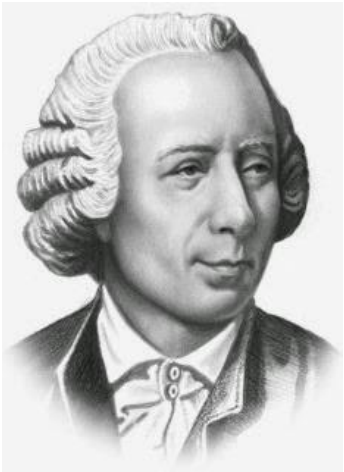
$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$



$$\infty < -1$$

$$1 < \infty < -1$$



Леонард Эйлер

XVIII в. нашей эры

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$$



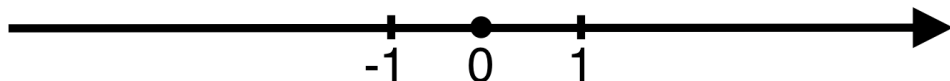
$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

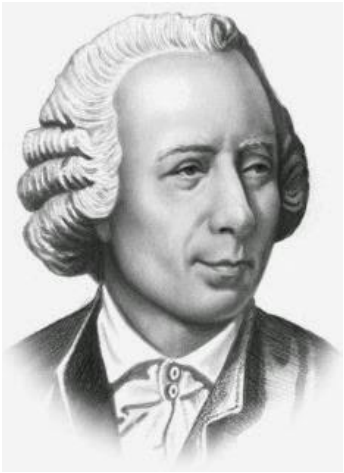
$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$



$$\infty < -1$$

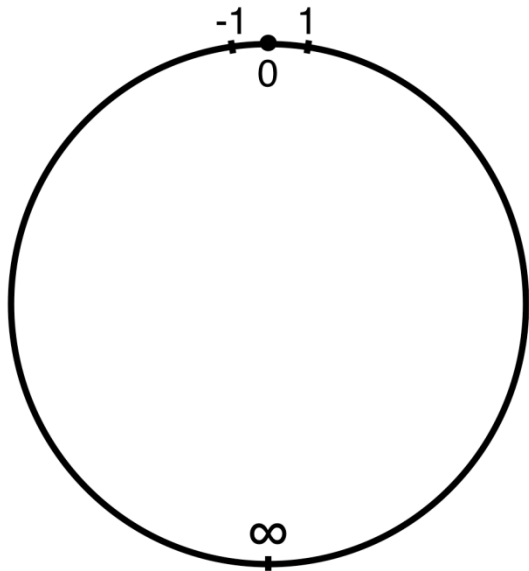
$$1 < \infty < -1$$





Леонард Эйлер

XVIII в. нашей эры



$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \dots$$



$$-1 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

$$\infty = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$



$$\infty < -1$$

$$1 < \infty < -1$$

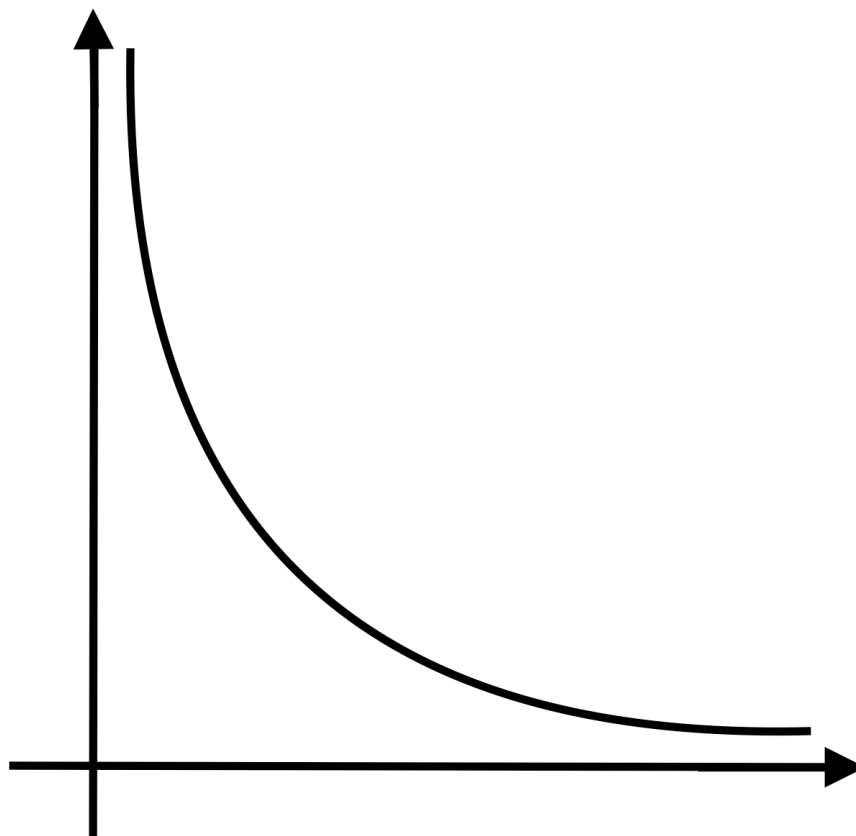


Эванджелиста
Торричелли
XVII в. нашей эры



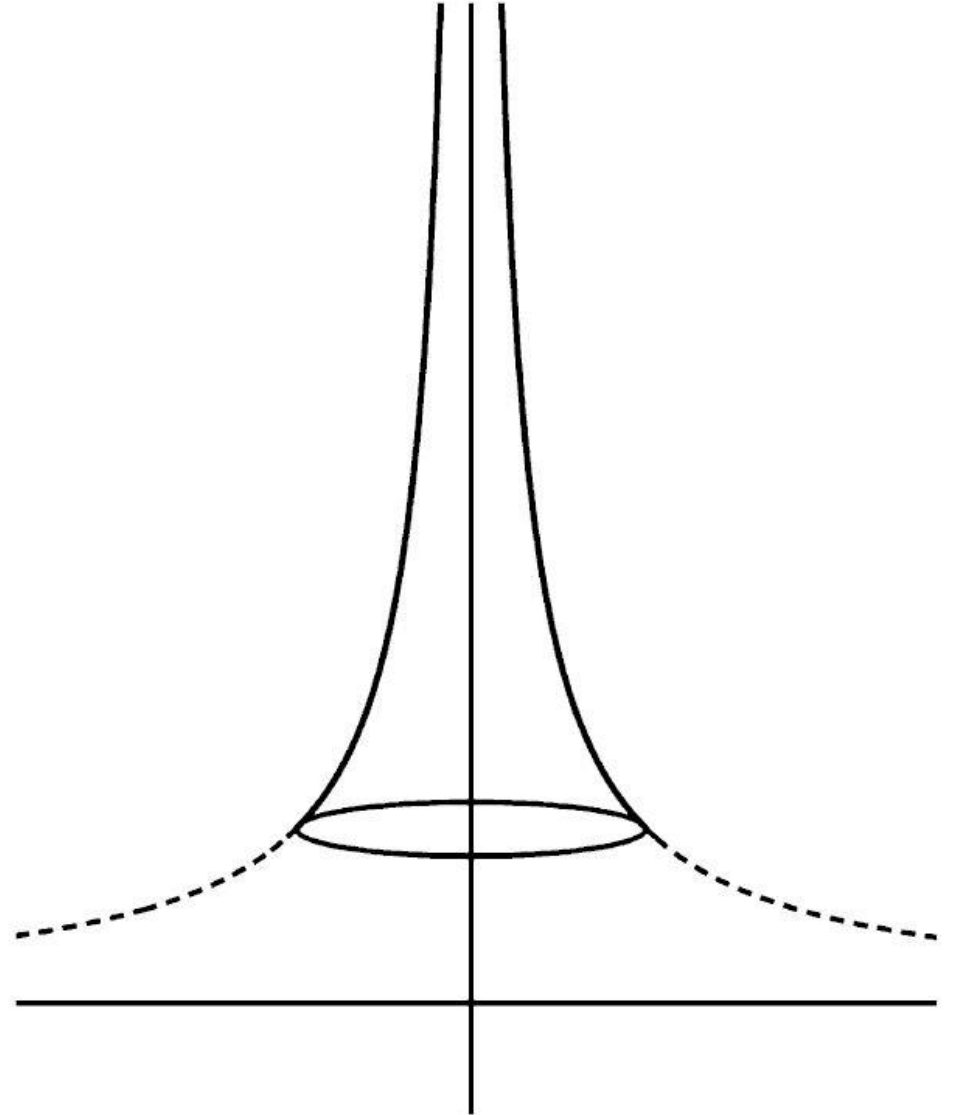
Эванджелиста
Торричелли
XVII в. нашей эры

$$xy = a^2$$





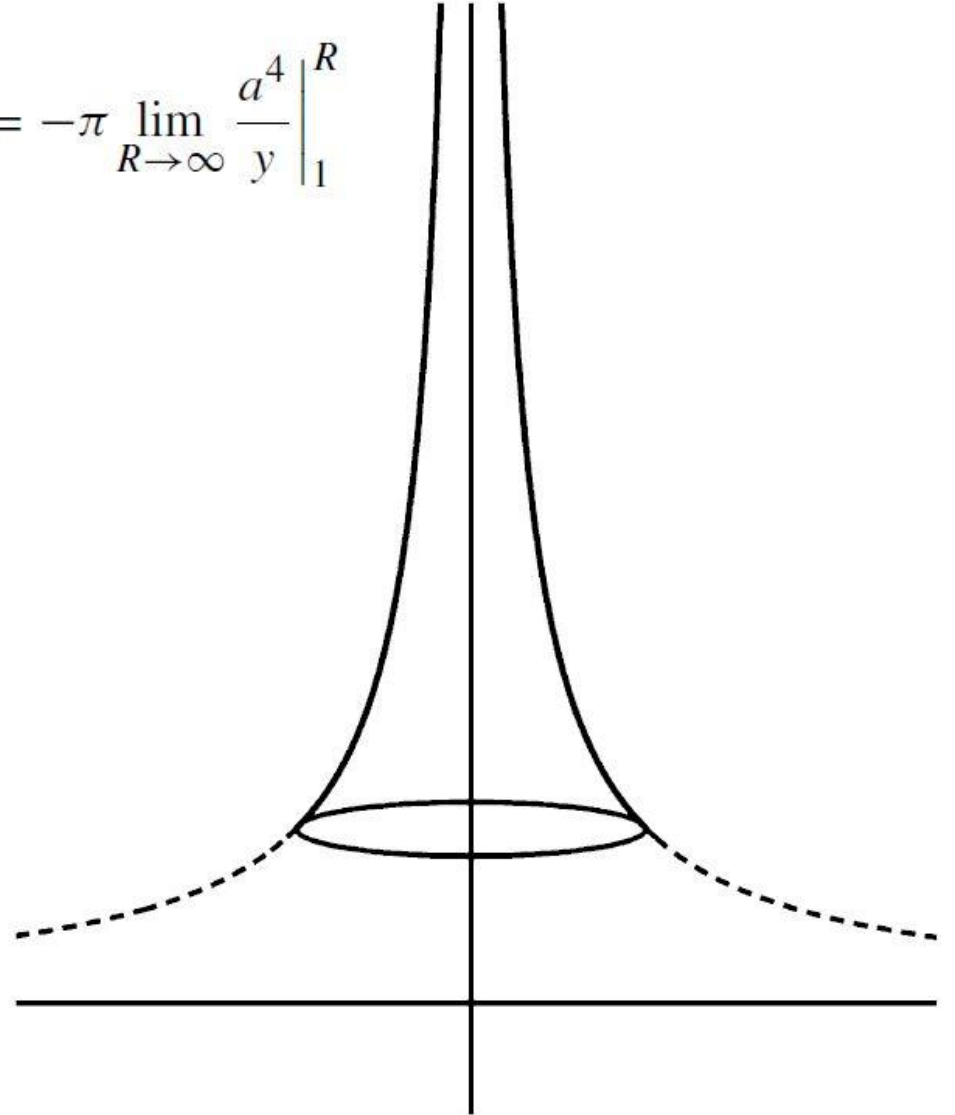
Эванджелиста
Торричелли
XVII в. нашей эры

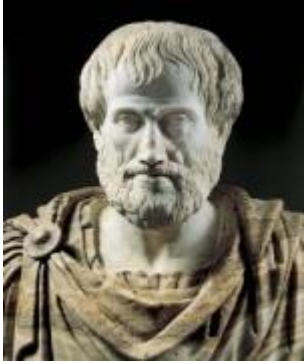




Эванджелиста
Торричелли
XVII в. нашей эры

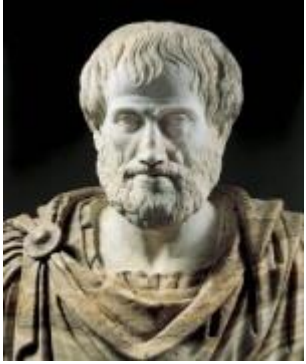
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^{\infty} \left(\frac{a^2}{y} \right)^2 dy = \pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \left(\frac{a^2}{y} \right)^2 dy = -\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{a^4}{y} \Big|_1^R \\ &= -\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{a^4}{R} - \frac{a^4}{1} \right) = \pi a^4 \end{aligned}$$





Евбулид

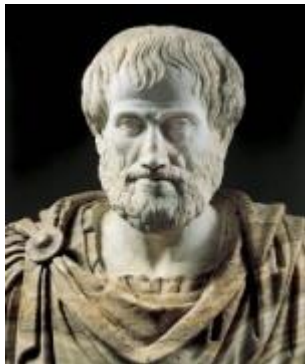
IV в. до нашей эры



Евбулид

IV в. до нашей эры

я лгу



Евбулид

IV в. до нашей эры

я лгу



Математический парадокс — это

несовершенство средств записи, их недостаточная строгость.



Математика – проблемы, парадоксы, задачи и решения

Вопросы для обсуждения:

1. Математика как технология мышления.
2. Математика как инструмент постановки и решения задач.
3. Математические парадоксы и их преодоление.

Сведения о докладчике:

доктор физико-математических наук, доцент

Области научных интересов:

нелинейная условная оптимизация, двухуровневая оптимизация,
равновесное распределение ресурсов, оптимизация топологии сетей

$$\begin{array}{c} 2 > -3 \\ 0.999... = 1 \\ \pi \approx 3.14 \\ \infty \\ + - \\ \times \div \\ \sqrt{2} \\ 1 + 2 \cdot 3 \\ (1 - 2) + 3 \\ 5^2 \\ 5(2 + 2) \\ 101_2 = 5_{10} \end{array}$$